

### 13. Übungsblatt zur Analysis II

**Aufgabe 73:** Zeigen Sie: In der Situation des Satzes von Picard-Lindelöf gilt

$$\|y(x) - y_0\| \leq \frac{M}{L} \left( e^{L|x-x_0|} - 1 \right) \quad \text{für } |x - x_0| \leq \alpha.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Abschätzung für die Iterierten  $y_k$ .

**Aufgabe 74:** Sei  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig. Zeigen Sie:

(a) Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

existiert auf ganz  $\mathbb{R}$ .

(b) Die Abbildung, die dem Anfangswert den Lösungswert an der Stelle  $x$  zuordnet, ist für jedes  $x$  linear.

**Aufgabe 75:** Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung

$$y' = A(x)y,$$

wobei  $A(x) + A(x)^T$  negativ semidefinit sei. Zeigen Sie, dass entlang jeder Lösung die euklidische Norm monoton abnimmt:

$$\|y(x_2)\| \leq \|y(x_1)\|, \quad \text{für beliebige } x_2 > x_1.$$

Hinweis:  $l = 0$ .

**Aufgabe 76:** Zeigen Sie: Entlang jeder Lösung der Pendelgleichung

$$y'' = -\sin(y)$$

ist die Energie

$$E = \frac{1}{2} (y')^2 - \cos(y)$$

konstant.

**Aufgabe 77:** Zeigen Sie: Jede Lösung der gedämpften Schwingungsgleichung

$$y'' + dy' + ky = 0, \quad d > 0, k > 0$$

strebt gegen 0 für  $x \rightarrow \infty$ .

**Aufgabe 78:** Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen

(i) Jede Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ konstant}$$

bleibt beschränkt für  $x \rightarrow \infty$ .

(ii) Jeder Eigenwert von  $A$  hat nicht-positiven Realteil, und die Eigenwerte mit Realteil 0 sind geometrisch einfach, also haben nur Jordan-Blöcke der Dimension 1.

Hinweis: Blatt 12.

**Abgabe in der Vorlesungspause am 14.07.2014.  
Besprechung in den Übungen vom 16.07.-18.07.2014.**