

12. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 67: Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Existiert die Lösung $y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Hinweis: Bestimmen Sie die Stammfunktion beider Seiten der Gleichung $\frac{y'}{y^2} = 1$ (Verfahren der ‘Trennung der Variablen‘).

Aufgabe 68: Reduzieren Sie die Bernoulli’ Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)y^m$$

mithilfe der Transformation $z(x) = y^q$ für ein geeignetes q auf eine lineare Differentialgleichung.

Aufgabe 69: Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung beschränkten Wachstums,

$$y' = (2 - y)y, \quad y(0) = 1.$$

Hinweis: Aufgabe 68.

Aufgabe 70: Für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + ay' + by = 0$$

habe das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle λ . Zeigen Sie, daß dann $e^{\lambda x}$ und $xe^{\lambda x}$ Lösungen der Differentialgleichung sind.

Aufgabe 71: Bestimmen Sie zunächst die Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie dann, daß die i -te Lösungskomponente der linearen Differentialgleichung

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} y$$

von der Gestalt $y_i(x) = p_i(x)e^{\lambda x}$, mit p_i einem Polynom vom Grad kleiner als i , ist.

Aufgabe 72: Zeigen Sie für das Anfangswertproblem der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$y' = Ay + b(x), \quad y(0) = y_0 \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b(x) \in \mathbb{R}^n)$$

die Variation-der-Konstanten-Formel:

$$y(x) = e^{xA}y_0 + \int_0^x e^{(x-\xi)A}b(\xi)d\xi.$$

**Abgabe in der Vorlesungspause am 07.07.2014.
Besprechung in den Übungen vom 09.07.-11.07.2014.**