Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 23.06.2014

11. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 61: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, wegzusammenhängende Menge, deren Rand eine Nullmenge ist. Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ stetig, $g(x) \geq 0$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in A$, sodaß

$$\int_A f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_A g(x)dx \; .$$

Aufgabe 62: $\rho = 1+\cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ stellt eine geschlossene Kurve (Kardioide) in Polarkoordinaten dar. Berechnen Sie den durch diese Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt.

Aufgabe 63: L sei eine symmetrische, positiv definite $n \times n$–Matrix; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien die Eigenwerte von L:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;|x^T Lx \leq 1 \right\}, \quad B = \{ x \in \mathbb{R}^n | \; \|x\|_2 \leq 1 \} \; .$$

Zeigen Sie: $\mu(A) = \mu(B) \cdot (\lambda_1 \ldots \lambda_n)^{-1/2}$.
Hinweis: Finden Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit $L = U^T D^2 U$.

Aufgabe 64: Sei $A = \{ x \in \mathbb{R}^n | \; r_1 \leq \|x\|_2 \leq r_2 \}$, $\quad \Phi : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x) = \Phi(\|x\|_2)$. Zeigen Sie für $n = 3$:

$$\int_A f(x)dx = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \Phi(r) r^2 dr \; .$$

Wie sieht die entsprechende Formel für $n = 2$ aus?

Aufgabe 65: Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Kurven $xy = 2$, $xy = 4$, $xy^3 = 3$ und $xy^3 = 6$ eingeschlossenen Gebietes.
Hinweis: Transformationsformel

Aufgabe 66: Sei $B_R = \left\{ (x, y) | \; x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$, $\quad Q_R = \{ (x, y) | \; |x| \leq R \text{ und } |y| \leq R \}$.

(a) Zeigen Sie: $\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) d(x, y) = \pi$

(b) Folgern Sie aus (a): $\lim_{R\to\infty} \int_{Q_R} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) d(x, y) = \pi$.

(c) Zeigen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$.
Hinweis: $\left(\int_{-R}^{R} \exp(-x^2)dx\right) \left(\int_{-R}^{R} \exp(-y^2)dy\right)$ als Doppelintegral auffassen.

Abgabe in der Vorlesungspause am 30.06.2014.
Besprechung in den Übungen vom 02.07.-04.07.2014.