Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 16.06.2014

10. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 55: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $U := \{x \in [a,b] : \ f \text{ ist nicht stetig in } x\}$ die Menge Ihrer Unstetigkeitsstellen. Zeigen Sie: Wenn U höchstens endlich viele Häufungspunkte hat, dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

Aufgabe 56: Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_A \exp(-x^2)d(x,y) \qquad A = \text{ Dreieck mit Eckpunkten } (0,0),(3,0),(3,1),$$

$$\int_A \cos(x+y+z)d(x,y,z) \qquad \text{wobei } A = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

Hinweis: $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2\cos\alpha$.

Aufgabe 57:

i) Was ist der Flächeninhalt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

ii) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A z \, dxdydz$$

über die obere Hälfte A des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$$

Aufgabe 58: Sei $Q \in \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x)| \le M < \infty \ \forall x \in Q$, für welche die Menge der Unstetigkeitspunnkte eine Nullmenge ist. Zeigen Sie, daß die im Beweis des Satzes 1 von Paragraph 5.2 definierte Regularisierung f_ρ von f stetig auf Q und durch M beschränkt ist.

Aufgabe 59: Sei

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \ge 0, x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le c\}.$$

Zeigen Sie mittel Induktion nach n, daß $\mu(A) = \dfrac{c^n}{n!}$.

Aufgabe 60: Sei $f(y) = \min\{1, \ln(1/y)\}$.

Drücken Sie $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{f(y)} xy \, dx\right] dy$ als Integral über eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ aus und berechnen Sie dieses Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge.

Abgabe in der Vorlesungspause am 23.06.2014.
Besprechung in den Übungen vom 25.06.-27.06.2014.