Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.06.2014

9. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 49: Berechnen Sie den Maximalwert von

$$x^a y^b z^c \quad (x, y, z > 0\,; \quad a, b, c > 0 \text{ gegeben})$$

unter der Bedingung $x^k + y^k + z^k = 1 \quad (k > 0)$.
Schließen Sie daraus auf die Ungleichung

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c} .$$

Aufgabe 50: Sei $m < n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vom Rang m. Sei $b \in \mathbb{R}^m$. Finden Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren jene Lösung von $Ax = b$, für die $\|x\|_2$ minimal ist.

Aufgabe 51: Zeigen Sie: Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar sind, so gilt in einem lokalen Minimum x_0 von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$

$$v^T \left(\nabla^2 f(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 g_i(x_0) \right) v \geq 0 \quad \text{für alle } v \in \text{Ker } Dg(x_0)\,.$$

Hierbei sind λ_i die Lagrange-Multiplikatoren zu x_0.

Aufgabe 52:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(k)}(0) = 0 \quad$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $a < b < c < d$. Zeigen Sie: Es gibt eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (b, c) \\ 0 & \text{für } x \in (-\infty, a) \cup (d, \infty) \end{cases}$$

und ϕ streng monoton auf (a, b) und (c, d).

Hinweis zu (b): Mit Hilfe der Funktion f aus Teil (a) bauen Sie zuerst eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die für $x < 0$ verschwindet, für $x > 1$ konstant 1 ist, und auf $(0, 1)$ monoton steigend ist.

Aufgabe 53: Lösen Sie das Variationsproblem

$$\int_0^1 y(x)dx \qquad \text{maximal!}$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_0^1 \sqrt{1+y'(x)^2}\, dx = l \qquad (1 < l < \pi)$$

und den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$. Interpretieren Sie die Aufgabenstellung und das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 54: Es werde das Variationsproblem

$$\int_a^b f\left(x, y(x),\ y'(x),\ y''(x)\right) dx \quad \text{minimal!}$$

mit den Randbedingungen $y(a) = \alpha_0,\ y'(a) = \alpha_1,\ y(b) = \beta_0,\ y'(b) = \beta_1$ betrachtet. Zeigen Sie: Falls f und y genügend oft stetig differenzierbar sind, ist eine notwendige Bedingung für das Minimum die Euler-Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0\ ,$$

wobei die Funktionen in $(x, y(x),\ y'(x),\ y''(x))$ mit $x \in [a,b]$ auszuwerten sind.

Abgabe in der Vorlesungspause am 16.06.2014.
Besprechung in den Übungen vom 18.06.-20.06.2014.