

## 7. Übungsblatt zur Analysis II

**Aufgabe 37:**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $f(x, y) = e^{2x-y} + 3x - 2y - 1$ . Zeigen Sie, daß sich  $f(x, y) = 0$  in einer Umgebung von  $(0, 0)$  nach  $y$  auflösen läßt. Berechnen Sie  $y'(0)$ .

**Aufgabe 38:**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch  $f_1(x, y) = e^x \cos y$ ,  $f_2(x, y) = e^x \sin y$ . Zeigen Sie:

- i)  $f$  erfüllt in jedem Punkt die Voraussetzungen des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit.
- ii)  $f$  ist nicht injektiv.
- iii) Sei  $U = \{(x, y) | 0 < y < 2\pi\}$ ;  $f|_U$  ist injektiv.
- iv) Bestimmen Sie  $f(U)$  und die inverse Abbildung  $g : f(U) \rightarrow U$ .

**Aufgabe 39:** Sei  $z(x, y)$  durch die Gleichung

$$z = x + y\varphi(z)$$

mit stetig differenzierbarer Funktion  $\varphi$  definiert. Zeigen Sie, daß unter der Voraussetzung  $1 - y\varphi'(z) \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}$$

gilt.

**Aufgabe 40:** In der Vorlesung wurde der Satz über die lokale Umkehrbarkeit verwendet, um die Aussage des Satzes über implizite Funktionen zu beweisen. Zeigen Sie, daß man andererseits die Aussage des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen kann.

**Aufgabe 41:** (Peano 1884, Annotazione N. 103)

Zeigen Sie, daß für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die gemischten partiellen Ableitungen  $\partial_x \partial_y f(0, 0)$  und  $\partial_y \partial_x f(0, 0)$  existieren, aber

$$\partial_x \partial_y f(0, 0) \neq \partial_y \partial_x f(0, 0).$$

**Aufgabe 42:** Geben Sie Bedingungen an  $f : \mathbb{R}^{17} \rightarrow \mathbb{R}$  an, sodaß  $\partial_{13} \partial_5 \partial_9 \partial_7 f = \partial_7 \partial_{13} \partial_9 \partial_5 f$ . Formulieren Sie eine Verallgemeinerung Ihres Resultats.

**Abgabe in der Vorlesungspause am 26.05.2014.**

**Besprechung in den Übungen vom 28.05.-30.05.2014.**