Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich Tübingen, den 12.05.2014

6. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 31: Es sei $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar sei. Berechnen Sie

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$$

und zeigen Sie, daß

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right)^2 .$$

Aufgabe 32: Für die differenzierbaren Funktionen $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelte

$$(*) \qquad \dot{p}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(p(t), q(t)) \ , \quad \dot{q}_k(t) = +\frac{\partial H}{\partial p_k}(p(t), q(t)) \quad (k = 1, \dots, n)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $H(p(t), q(t))$ einen konstanten Wert unabhängig von t annimmt.

Bemerkung: Die Hamilton' Gleichungen $(*)$ bestimmen die Bewegung eines mechanischen Systems mit Positionen $q(t)$ und Impulsen $p(t)$ zur Zeit t. Die Gesamtenergie $H(p(t), q(t))$ bleibt dabei erhalten.

Aufgabe 33: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$. Zeigen Sie, daß mit $a = 0, b = 2\pi$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(b) - f(a) \neq f'(\xi)(b-a) .$$

Aufgabe 34: (Matrizennormen) Zeigen Sie zunächst für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ folgende Ungleichungen:

(i) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)
$\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)

(ii) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$
$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \, \|A\|_\infty}$

(iii) $\|A\|_2 = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}$

Zeigen Sie dann für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und jede Matrixnorm die Ungleichung

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Hinweise: zu (ii) Cauchy-Schwarz; $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1 \, \|x\|_\infty$ für $x \in \mathbb{R}^n$
zu (iii) Diagonalisierung $A^T A = Q^T D Q$ mit Orthogonalmatrix Q.

Aufgabe 35: Seien $a > 0$ und die Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{a}{1+a}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Finden Sie den größten Definitionsbereich D, sodaß der Banach' Fixpunktsatz für jedes abgeschlossene $A \subset D$ anwendbar ist.

Aufgabe 36: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Kontraktion und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Zeigen Sie, daß für betragsmäßig hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}$ auch $f + \varepsilon g$ eine Kontraktion ist. Zeigen Sie für die Differenz der Fixpunkte x^* von f und x_ε^* von $f + \varepsilon g$, daß

$$\|x_\varepsilon^* - x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\|g(x_\varepsilon^*)\| \quad , \quad \|x_\varepsilon^* - x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\alpha-\varepsilon M}\|g(x^*)\| \; .$$

wobei $\alpha < 1$ die Lipschitz-Konstante von f bezeichnet und M eine Schranke für die Ableitung von g. Hinweis zur Ungleichung: Betrachten Sie die Fixpunktiteration von f mit Startwert x_ε^* bzw x^*.

Abgabe in der Vorlesungspause am 19.05.2014.
Besprechung in den Übungen vom 21.05.-23.05.2014.