Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 05.05.2014

5. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 25: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, und seien $w, z \in X$. Sei weiters $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = w$ und $\gamma(1) = z$. Zeigen Sie, daß es endlich viele offene Kugeln $B_1, ..., B_r$ gibt mit $\gamma([0,1]) \subset B_1 \cup ... \cup B_r \subset X$.

Aufgabe 26: Seien die Menge $X \subset \mathbb{R}^n$, die Punkte $w, z \in X$, der Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = w$ und $\gamma(1) = z$ und die endliche offene Überdeckung $\{B_1, ..., B_r\}$ der vorherigen Aufgabe gegeben. Zeigen Sie, daß Punkte $w = z_0, ..., z_n = z$ existieren, für welche die Verbindungsstrecke von z_{k-1} nach z_k für alle $k = 1, ..., n$ ganz in X liegt.

Hinweis: Sie zeigen somit die Existenz eines sogenannten Polygonzuges, der w mit z verbindet. Auf dem Weg zu einen möglichen Beweis zeigt man folgende Aussagen:

i) Ist für $i = 1, ..., r$ die Menge U_i das Urbild $\gamma^{-1}(B_i \cap \gamma([0,1]))$ und ist $w_i = \gamma(\sup U_i)$, dann ist $w_i = z$ oder $w_i \in \partial B_i$.

ii) Es gibt ein $j \in \{1, ..., r\} \backslash \{i\}$ so, daß für jeden Punkt $x \in B_i$ die Verbindungsstrecke von x nach w_i ganz in $B_i \cup B_j$ liegt.

Aufgabe 27: Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^2 - 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(X) = X^2$, ist differenzierbar, und ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f'(X)H = XH + HX \ .$$

Aufgabe 29: Zeigen Sie: Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so auch das Produkt fg. Berechnen Sie dessen Ableitung.

Aufgabe 30: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f in $(0,0)$ differenzierbar ist aber die partiellen Ableitungen dort nicht stetig sind.

Abgabe in der Vorlesungspause am 12.05.2014.
Besprechung in den Übungen vom 14.05.-16.05.2014.