

#### 4. Übungsblatt zur Analysis II

**Aufgabe 19:** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen,  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $K \cap A = \emptyset$ . Zeigen Sie:

- (a) Die Abstandsfunktion  $x \mapsto d(x, A) := \inf \{\|x - a\|; a \in A\}$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Es gibt ein  $b \in A$  so, daß  $d(x, A) = \|x - b\|$ . Das obige Infimum ist also ein Minimum.
- (c) Es gibt ein  $q \in K$  und ein  $c \in A$  mit

$$d(K, A) := \inf \{d(x, A); x \in K\} = d(q, A) = \|q - c\| (> 0).$$

- (d) Geben Sie ein Beispiel abgeschlossener Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  mit  $A \cap B = \emptyset$  und  $d(B, A) = 0$ .

**Aufgabe 20:** Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, daß

$$f : \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}$$

ein Homöomorphismus ist. Geben Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  an.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst den Fall  $n = 1$ .

**Aufgabe 21:** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig und injektiv. Zeigen Sie, daß  $f : K \rightarrow f(K)$  ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Hausdorff's Charakterisierung der Stetigkeit.

**Aufgabe 22:** Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien weiters eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in (a, b)$  gegeben. Berechnen Sie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \frac{1}{\varepsilon} \phi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) dx.$$

**Aufgabe 23:** Zeigen Sie, daß die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(\|x\|)$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 24:** Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von stetigen Funktionen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  konvergieren. Zeigen Sie, daß  $f$  auch stetig ist.

**Abgabe in der Vorlesungspause am 05.05.2014.**

**Besprechung in den Übungen vom 07.05.-09.05.2014.**