

## 2. Übungsblatt zur Analysis II

**Aufgabe 7:** Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm. Zeigen Sie

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| .$$

**Aufgabe 8:** Zeigen Sie: Für jedes  $p \geq 1$  und beliebiges  $x \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty .$$

Insbesondere gilt daher

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

**Aufgabe 9:** Zeigen Sie: Für beliebiges  $x \in \mathbb{R}^n$  ist die Funktion  $p \mapsto \|x\|_p$  auf  $[1, \infty)$  monoton fallend.

**Aufgabe 10:** Zeigen Sie, daß eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  genau dann bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  gegen  $a \in \mathbb{R}^n$  konvergiert, wenn sie bezüglich der euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$  gegen  $a$  konvergiert.

**Aufgabe 11:** Zeigen Sie für  $M \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{M} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid M \text{ ist Umgebung von } x\} \\ \overline{M} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid M \text{ hat nichtleeren Durchschnitt mit jeder Umgebung von } x\} . \end{aligned}$$

**Aufgabe 12:** Zeigen Sie für  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad , \quad (A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} .$$

Geben Sie Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}$  an, für die

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad (A \cup B)^\circ \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} .$$

**Abgabe in der Vorlesungspause am 23.04.2014, bzw. am 23.04.2014 in den Übungen.  
Besprechung in den Übungen vom 23.04.-25.04.2014.**