Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 07.04.2014

1. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 1: Zeigen Sie mithilfe eines Gegenbeispieles, daß die Rückrichtung in Teil b) von Satz 1 aus der Vorlesung im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß f genau dann konvex ist, wenn für alle $x_1 < x_2 < x_3$ aus (a,b) gilt, daß

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Zeigen Sie auch, daß f konvex ist, falls

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ für alle } x_1, x_2 \in (a,b).$$

Hinweis: Sei $A := \{\lambda \in [0,1]; f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\}$. Zeigen Sie zuerst über Induktion, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k 2^{-k} \in A$ für $a_k \in \{0,1\}$. Benutzen Sie dann die Schreibweise in der Basis 2, um zu zeigen dass $A = [0,1]$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, daß die Funktion $-\ln x$ auf $(0,\infty)$ konvex ist und beweisen Sie damit die Ungleichung zwischen dem gewichteten harmonischen und geometrischen Mittel: Für beliebige positive Zahlen $x_1,\dots,x_n$ und positive $\theta_1,\dots,\theta_n$ mit $\theta_1+\ldots+\theta_n = 1$ gilt

$$\frac{1}{\left(\frac{\theta_1}{x_1}+\ldots+\frac{\theta_n}{x_n}\right)} \leq x_1^{\theta_1}\ldots x_n^{\theta_n}\,.$$

Aufgabe 4: Seien $p,q>1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Zeigen Sie die Höldersche Ungleichung für Integrale: Für stetige Funktionen $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{1/q}\,.$$

Hinweis: Riemann-Summen

Aufgabe 5: Zeigen Sie, daß durch

$$\|x\|_{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{1/2} \right)^2$$

keine Norm definiert wird, da die Dreiecksungleichung nicht gilt.

Aufgabe 6: Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt, daß

i) $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,

ii) $d(x,y) = d(y,x)$,

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Zeigen Sie, daß jede Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mittels $d(x,y) := \|x - y\|$ eine Metrik induziert.

Abgabe in der Vorlesungspause am 14.04.2014.
Besprechung in den Übungen vom 16.-18.04.2014.