Musterlösungen zu Blatt 13

1 Aufgabe 73

Zeigen Sie: In der Situation des Satzes von Picard-Lindelöf gilt

$$y(x) - y_0 \leq \frac{M}{L}\left(e^{L|x-x_0|} - 1\right) \quad \text{für}|x - x_0| \leq \alpha.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Abschätzung für die Iterierten y_k.

Beweis. Zunächst zeigt man (vgl. Schritt b) des Beweises des Satzes von Picard-Lindelöf in der Vorlesung), dass $\|y_{k+1} - y_k\| \leq 2ML^{k-1}\frac{|x-x_0|^k}{k!}$. Hierbei ist der Induktionsanfang

$$\|y_2(x) - \underbrace{y_1(x)}_{=y_0}\| \leq \int_{x_0}^{x} \|f(\xi, y_1(\xi))\| \leq M|x - x_0|$$

und der Induktionsschritt ist komplett analog zum Induktionsschritt von Teil b) in Satz 1 von Kapitel VI.2. Mit der so bewiesenen Aussage hat man dann

$$\begin{aligned}
\|y(x) - y_0\| &\leq \|y(x) - y_k(x)\| + \sum_{l=3}^{k} \underbrace{\|y_l(x) - y_{l-1}(x)\|}_{\leq ML^{l-2}\frac{|x-x_0|^{l-1}}{(l-1)!}} + \underbrace{\|y_2(x) - y_1(x)\|}_{\leq M|x-x_0|} \\
&\leq \|y(x) - y_k(x)\| + \frac{M}{L}\sum_{l=1}^{k-1} \frac{(L\,|x - x_0|)^l}{l!} \leq \|y(x) - y_k(x)\| + \frac{M}{L}\left(e^{L\|x-x_0\|} - 1\right).
\end{aligned}$$

Da die Picard-Iterierten (y_k) gleichmäßig gegen y konvergieren (also insbesondere punktweise gegen y konvergieren), folgt die Behauptung. □

2 Aufgabe 74

Sei $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad y' = A(x)y,$$

existiert auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Die Abbildung, die dem Anfangswert den Lösungswert an der Stelle x zuordnet, ist für jedes x linear.

Beweis. **Zu (a):** Zuerst macht man sich klar, dass für die Funktion $f(x,y) := A(x)y$ folgendes gilt: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\forall \rho > 0$ existiert ein $L(x,\rho) > 0$, so dass $\forall y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\forall \widetilde{x} \in [x-\rho, x+\rho]$ gilt

$$\|f(\widetilde{x}, y) - f(\widetilde{x}, z)\| \leq L\|y - z\|$$

Das sieht man durch folgende Ungleichung:

$$\|f(\widetilde{x}, y) - f(\widetilde{x}, z)\| = \|A(\widetilde{x})(y - z)\| \leq \|A(\widetilde{x})\| \cdot \|y - z\|$$

$x \mapsto \|A(x)\|$ eine stetige Funktion ist, nimmt sie ein Maximum auf $[x-\rho, x+\rho]$ an. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige Lösung auf $[x-\rho, x+\rho]$.
Jede Lösung einer (stetigen) Matrix ODE, die ein beschränktes Definitions-Intervall hat, lässt sich also fortsetzen. Die Maximale-Lösung muss also auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.
Zu (b): Die Abbildung ist wie folgt zu verstehen: Man fixiere $x \in \mathbb{R}$. Zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert nun eine eindeutige Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die das AWP

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

löst. Werte schließlich diese Lösung in x aus.
Wir bezeichnen die Abbildung mit $R(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist: $\forall y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$R(x)(y_0 + \lambda z_0) = R(x)(y_0) + \lambda \cdot R(x)(z_0).$$

Sei y die eindeutig bestimmte Maximale-Lösung zum Anfangswert y_0 und z die Maximale-Lösung zum Anfangswert z_0. Offenbar löst die Funktion $x \mapsto y(x) + \lambda \cdot z(x)$ die Matrix ODE zum Anfangswert $y_0 + \lambda z_0$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt die Behauptung. □

3 Aufgabe 75

Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung

$$y'(x) = A(x)y(x),$$

wobei $A(x) + A(x)^T$ negativ semidefinit sei. Zeigen Sie, dass entlang jeder Lösung die euklidische Norm monoton abnimmt:

$$y(x_2) \leq y(x_1), \quad \text{für beliebige } x_2 > x_1.$$

Beweis.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\|y\|^2 = 2 \cdot \langle y', y \rangle = 2 \cdot \langle Ay, y \rangle = \langle Ay, y \rangle + \langle y, {}^{\mathrm{T}}\!Ay \rangle = \langle (A + {}^{\mathrm{T}}\!A)y, y \rangle \leq 0.$$ □

4 Aufgabe 76

Zeigen Sie: Entlang jeder Lösung der Pendelgleichung

$$y'' = -\sin(y)$$

ist die Energie

$$E = \frac{1}{2}(y')^2 - \cos(y)$$

konstant.

Beweis.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = y'' \cdot y' + \sin(y) \cdot y' = -\sin(y)y' + \sin(y)y' = 0.$$ □

5 Aufgabe 77

Zeigen Sie: Jede Lösung der gedämpften Schwingungsgleichung

$$y'' + d \cdot y' + k \cdot y = 0, \quad d > 0, k > 0$$

strebt gegen 0 für $x \to \infty$.

Beweis. Das charakteristischen Polynom lautet:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + d \cdot \lambda + k.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4k}}{2}.$$

Falls die Diskriminante verschwindet, dann haben wir eine doppelte Nullstelle und die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination von $e^{\lambda_1 x}$ und $xe^{\lambda_1 x}$. Da aber $\lambda_1 < 0$ ist und die Exponentialfunktion stärker fällt als jedes Polynom, strebt die Lösung für $x \to \infty$ gegen 0.
Falls die Diskriminante nicht verschwindet, dann ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination von $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$. Falls die Diskriminante positiv ist, dann ist der Zähler negativ und die Behauptung folgt. Falls die Diskriminante negativ ist, dann ist der Realteil von λ_1 und λ_2 negativ und der Betrag der Lösung strebt wieder gegen 0. □

6 Aufgabe 78

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen

(i) Jede Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ konstant,}$$

bleibt beschränkt für $x \to \infty$.

(ii) Jeder Eigenwert von A hat nicht-positiven Realteil, und die Eigenwerte mit Realteil 0 sind geometrisch einfach, also haben nur Jorden-Blöcke der Dimension 1.

Beweis. Bevor wir die Behauptung zeigen, wiederholen wir die Jordan-Normalform der Linearen Algebra: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert eine (komplexe) Basiswechsel-Matrix $T \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$, Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ und natürliche Zahlen $n_1^{(i)} \geq n_2^{(i)} \geq \cdots \geq n_{m_i}^{(i)}$ (Dimensionen der Jordan-Blöcke zum Eigenwert λ_i) für $i = 1, \ldots, k$, so dass

$$T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

wobei $J(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, k$ aus mehreren Jordan-Blöcken aufgebaut ist, d.h.

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J(n_1^{(i)}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(n_{m_i}^{(i)}) \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad J(n_j^{(i)}) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_j^{(i)} \times n_j^{(i)}}.$$

Für $z := T \cdot y$ gilt

$$z' = Jz,$$

d.h. wir können o.E. $A = J$ annehmen. $z = (z_1, \ldots, z_k)$ ist ein Lösung dieser Matrix-ODE, wenn für $i = 1, \ldots, k$ die Funktion z_i die (kleinere) Matrix-ODE

$$z_i' = J(\lambda_i) z_i$$

löst. $z_i = (z_1^{(i)}, \ldots, z_{m_i}^{(i)})$ ist Lösung dieser Matrix-ODE, wenn für $j = 1, \ldots, m_i$ die Funktion $z_j^{(i)}$ die (kleinere) Matrix-ODE

$$(z_j^{(i)})' = J(n_j^{(i)}) z_j^{(i)}$$

löst, wobei die auftretende Matrix ein Jordan-Block der Dimension $n_j^{(i)}$ von A zum Eigenwert λ_i ist. D.h. z ist beschränkt genau dann, wenn jedes $z_j^{(i)}$ beschränkt ist. Auf Blatt 12 wurde aber gezeigt, dass $z_j^{(i)}$ von der Form

$$z_j^{(i)}(x) = \left(p_1(x) e^{\lambda_i x}, \ldots, p_j(x) e^{\lambda_i x}\right)$$

ist, wobei $p_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ für $k = 1, \ldots, j$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten vom Grad $\leq k - 1$ ist. Wenn die Lösung beschränkt bleiben soll, dann muss Realteil jedes Eigenwertes nicht-positiv sein. Wenn der Realteil des Eigenwertes negativ ist, dann ist die Beschränktheit diese Komponente gegeben. Falls der Realteil eines Eigenwertes verschwindet, dann ist es notwendig und hinreichend, dass der Grad des Polynoms gleich 0 ist, was gleichbedeutend damit ist, dass jeder Jordan-Block dieses Eigenwertes von Dimension 1 ist. $\square$