Musterlösung zu A52

1 Teil (a)

Behauptung.

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{i=k+1}^{2k} c_i x^{-i} \right) e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{für } x > 0 \quad \text{ und } f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{ für } c_i \in \mathbb{R} \text{ geeignet.}$$

Beweis. Beweis durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$.
I.A.: $k = 1$.
Die Berechnung der ersten Ableitung von f für $x > 0$ ergibt $f'(x) = x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} = \left(\sum_{i=2}^{2} x^{-i} \right) e^{-\frac{1}{x}}$. Für die Ableitung in 0 erhalten wir

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{\tilde{h} \to \infty} \frac{\tilde{h}}{e^{\tilde{h}}} = 0,$$

da die Exponentialfunktion schneller fällt als jedes Polynom. Die Behauptung sei also wahr für ein $k \in \mathbb{N}$.
I.S.: „$k \to k+1$". Für $x > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(k)}(x) &\overset{IV}{=} \left(\sum_{i=k+1}^{2k} c_i \cdot (-i) x^{-i-1} \right) e^{-\frac{1}{x}} + \left(\sum_{i=k+1}^{2k} c_i x^{-i} \right) x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \left(\sum_{i=k+2}^{2k+1} c_{i-1} \cdot (-i+1) x^{-i} \right) e^{-\frac{1}{x}} + \left(\sum_{i=k+1}^{2k} c_i x^{-i-2} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \left(\sum_{i=k+2}^{2k+1} c_{i-1} (-i+1) x^{-i} \right) e^{-\frac{1}{x}} + \left(\sum_{i=k+3}^{2k+2} c_{i-2} x^{-i} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \left(\sum_{i=k+2}^{2k+2} \tilde{c}_i x^{-i} \right) e^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

und
$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(k)}(h)-f^{(k)}(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{i=k+1}^{2k}c_i h^{-i}\right)e^{-\frac{1}{h}}=\lim_{\tilde h\to\infty}\left(\sum_{i=k+1}^{2k}c_i\tilde h^{i+1}\right)e^{-\tilde h}=0,$$
wiederum, da die Exponentialfunktion schneller fällt als jedes Polynom. $\square$

2 Teil (b)

2.1 0. Schritt

Die Funktion $f(x)$ ist 0 für negative x und wächst monoton gegen 1 für $x \to \infty$ (zur Illustration s. Abb. 1).

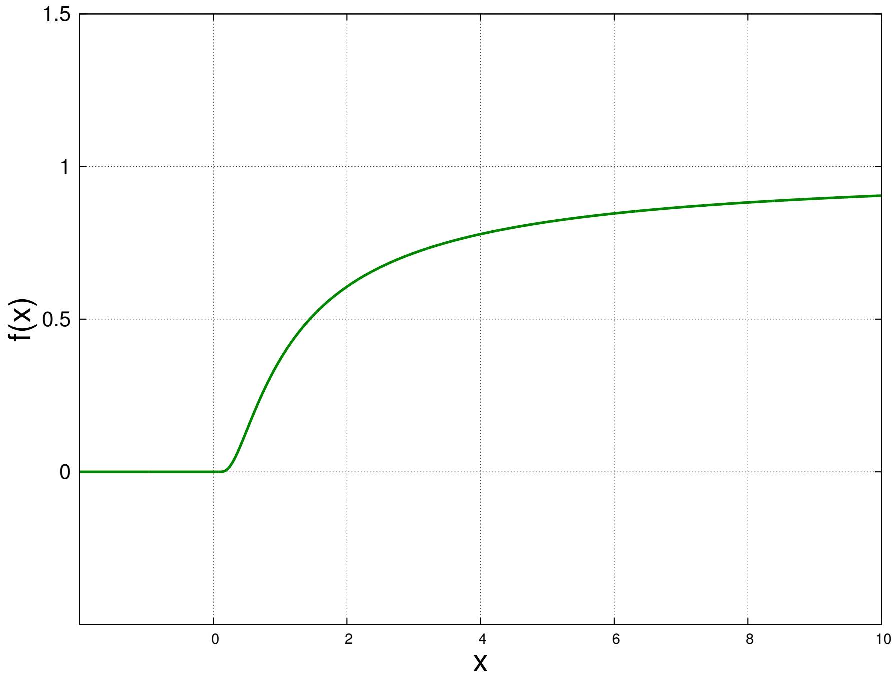

Abbildung 1: Die Funktion $f(x)$.

2.2 1. Schritt

Betrachte die Funktion $\phi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \phi_0(x) = e^e f(f(1) - f(1-x))$. Ist $x \leq 0$, so ist $1 - x > 1$, also gilt wegen der Monotonie von f, dass $f(1)-f(1-x) < 0$ ist, was wiederum $f(f(1)-f(1-x)) = 0$ impliziert. Ist $x > 1$, so ist $1 - x < 0$, also $f(1 - x) = 0$ und somit $e^e f(f(1) - f(1 - x)) = e^e f(f(1)) = e^e e^{-e} = 1$. Die Funtion $\phi_0(x)$ ist in Abb. 2 geplottet. Die Funktion ϕ_0 ist als Komposition glatter Funktionen

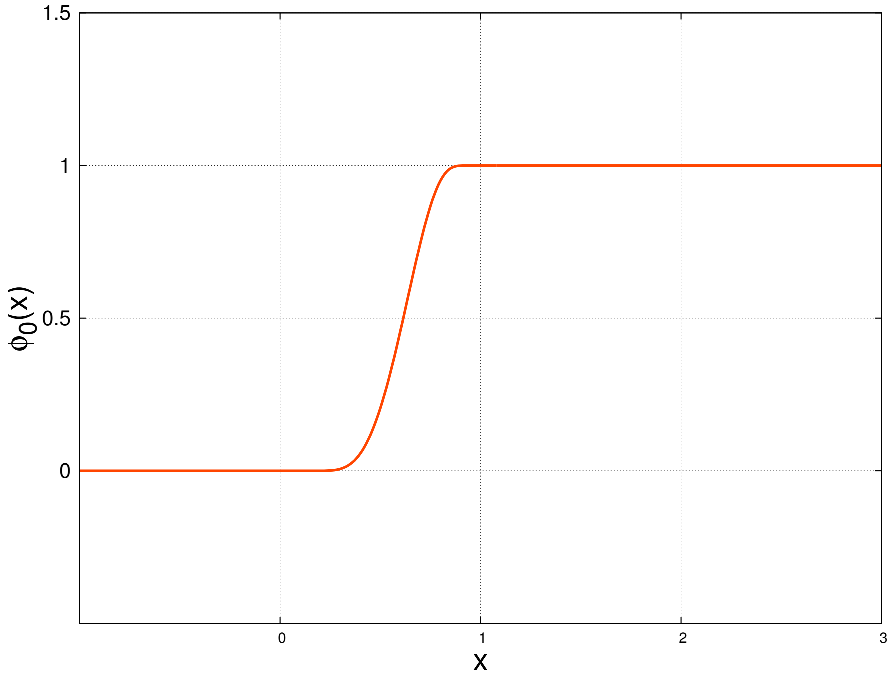

Abbildung 2: Die Funktion $\phi_0(x)$.

wieder glatt. Außerdem ist für $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\phi_0'(x) &= e^e f'(f(1) - f(1-x)) \cdot (-f'(1-x) \cdot (-1)) \\ &= e^e(-(f(1) - f(1-x)))^{-2} \exp\left(-(f(1) - f(1-x))^{-1}\right) \cdot (1-x)^{-2} \exp\left(-(1-x)^{-1}\right) \\ &> 0.\end{aligned}$$

Somit ist ϕ_0 auf $(0,1)$ streng monoton wachsend.

2.3 2. Schritt

Betrachte die Abbildung $\psi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$. Diese bildet das Intervall $[a,b]$ bijektiv auf $[0,1]$ ab. Setze nun $\phi_1(x) = \phi_0 \circ \psi_{a,b}(x)$. Diese Abbildung ist für $x < a$ konstant 0 und für $x > b$ konstant 1. Im Intervall (a,b) ist ϕ_1 streng monoton wachsend, da $\phi'(x) = \phi_0'(\frac{x-a}{b-a}) \cdot \frac{x}{b-a} > 0$ ist. Die Funktion $\phi_1(x)$ ist in Abb. 3 für den Fall $a = 2$, $b = 4$ skizziert.

3 3. Schritt

Analog zur Funktion ϕ_1 kann man die Funktion $\phi_2(x) = \phi_0 \circ \psi_{-d,-c}(-x)$ definieren. Diese ist für den Fall $c = 6$, $d = 8$ in Abb. 4 zu sehen.

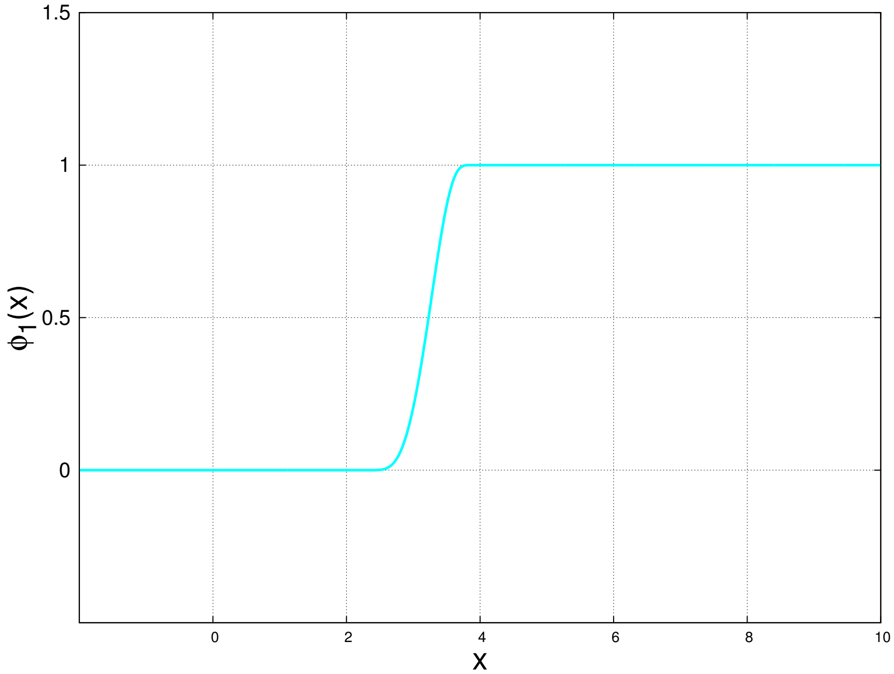

Abbildung 3: Die Funktion $\phi_1(x)$ für den Fall $a = 2$, $b = 4$.

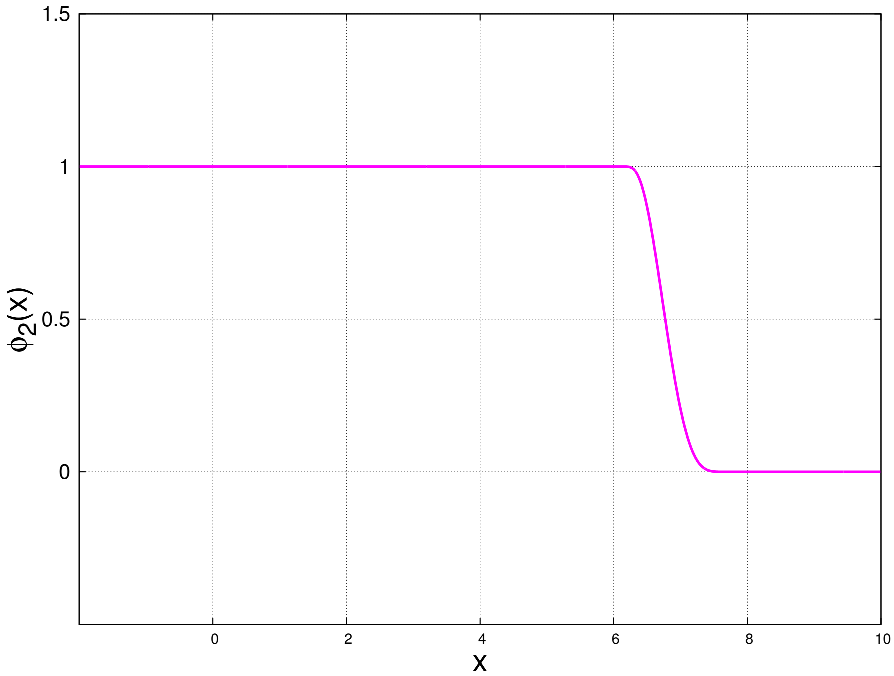

Abbildung 4: Die Funktion $\phi_2(x)$ für den Fall $c = 6$, $d = 8$.

4 4. und letzter Schritt

Nach der Vorarbeit in den Schritten zuvor, können wir nun einfach $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$x \mapsto \phi_0(\psi_{a,b}(x)) \cdot \phi_0(\psi_{-d,-c}(-x)).$$

definieren. Dieses hat die gewünschten Eigenschaften. In Abb. 5 ist die Funktion $\phi(x)$ für den Fall $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 8$ gezeigt. Abb. 6 zeigt für den gleichen Fall nochmal alle in der Aufgabe verwendeten Funktionen.

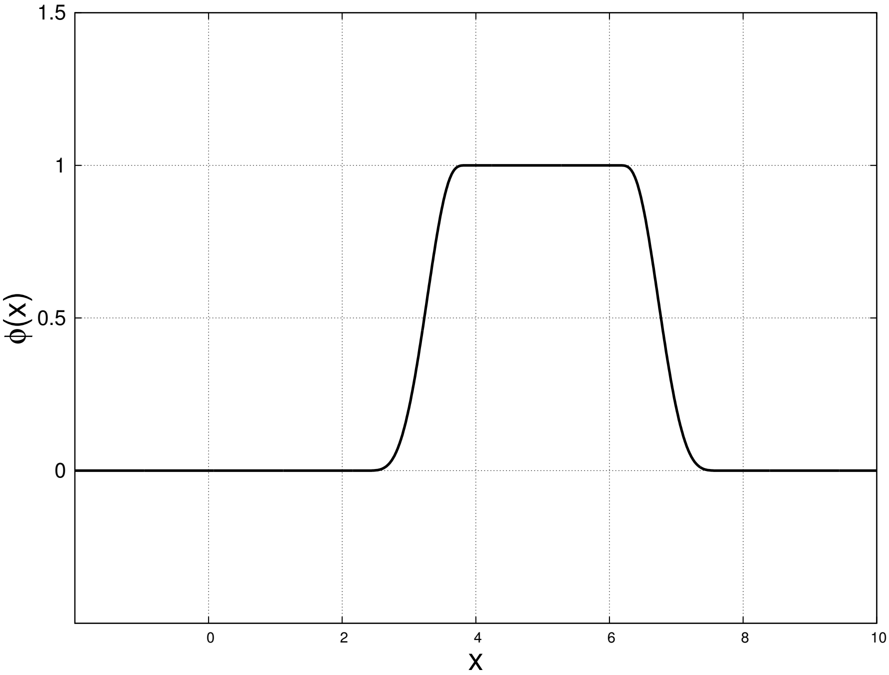

Abbildung 5: Die Funktion $\phi(x)$ für den Fall $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 8$.

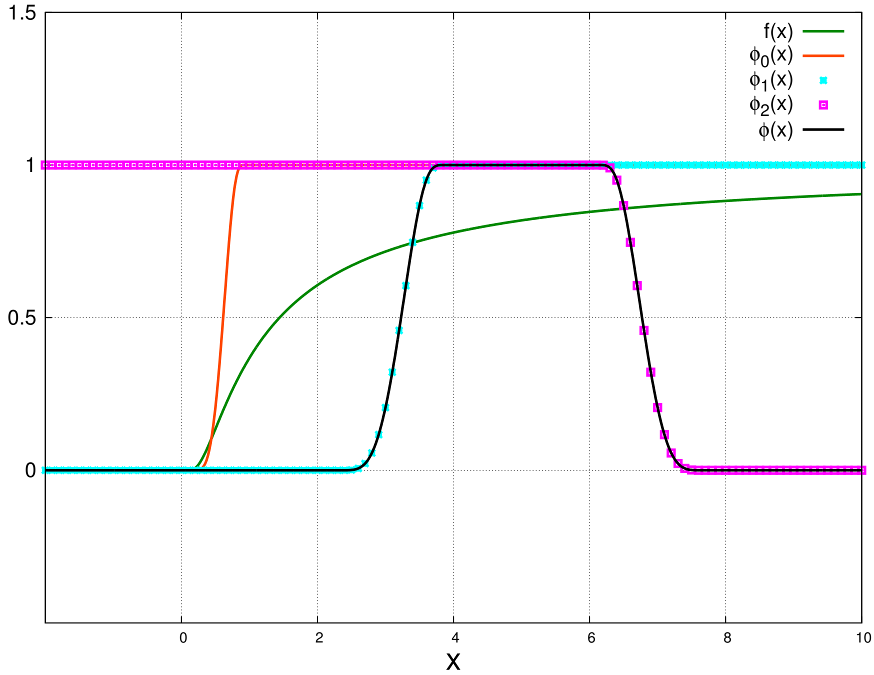

Abbildung 6: Alle in der Aufgabe betrachteten Funktionen für den Fall $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 8$.