

## 9. Übungsblatt zur Analysis II

### Aufgabe 49 :

Gegeben sei die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq c\}$$

Zeigen Sie, dass für das Volumen von  $A$  gilt:  $\mu(A) = \frac{c^n}{n!}$

Hinweis: Vollständige Induktion über  $n$ .

### Aufgabe 50 :

Sei  $A \subset \mathbb{R}^2$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (3, 0)$  und  $(x_3, y_3) = (3, 1)$ . Berechnen Sie

$$\int_A \exp(-x^2) d(x, y) .$$

### Aufgabe 51 :

Sei  $f(y) = \min\{1, \ln(1/y)\}$ . Drücken Sie

$$\int_0^1 \left[ \int_0^{f(y)} xy \, dx \right] dy$$

als Integral über eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  aus und berechnen Sie dieses Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge.

### Aufgabe 52 :

Es sei  $L$  eine symmetrische, positiv definite  $n \times n$ -Matrix und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ihre Eigenwerte. Weiter seien:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T L x \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\} .$$

Zeigen Sie:  $\mu(A) = \mu(B) \cdot (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{-1/2}$ . Was ist der Flächeninhalt einer Ellipse?

Hinweis: Finden Sie eine orthogonale Matrix  $U$  und eine Diagonalmatrix  $D$  mit  $L = U^T D^2 U$ .

### Aufgabe 53 :

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte, wegzusammenhängende Menge, deren Rand eine Nullmenge ist. Seien weiter  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $g(x) \geq 0$  für alle  $x \in A$ . Zeigen Sie, dass es ein  $\xi \in A$  gibt, sodass

$$\int_A f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_A g(x)dx .$$

### Aufgabe 54 :

Seien  $(\rho, \theta)$  Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^2$ , dann stellt  $\rho = 1 + \cos \theta$ ,  $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$  eine geschlossene Kurve im  $\mathbb{R}^2$  dar (Kardioide). Berechnen Sie den Flächeninhalt der durch diese Kurve eingeschlossenen Fläche.

**Es werden Lösungen für fünf Aufgaben gewertet. Diese werden so ausgewählt, dass Sie eine möglichst hohe Punktzahl erreichen.**

**Abgabe in der Vorlesungspause am 14.7.2009,**

**Besprechung in den Übungen am 16.7.2009 bzw. 17.7.2009**