Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 30.6.2009

8. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 43 :

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(k)}(0) = 0 \quad$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $a < b < c < d$. Zeigen Sie: Es gibt eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (b, c) \\ 0 & \text{für } x \in (-\infty, a) \cup (d, \infty) \end{cases}$$

und ϕ streng monoton auf (a, b) und (c, d) ist.

Hinweise zu (b): Können Sie mit Hilfe der folgenden Funktion ein solches ϕ definieren?

$$\xi(x) = f(f(1) - f(1 - x)).$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass mit $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ auch $f \circ g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe 44 :

Es werde das Variationsproblem

$$\int_a^b f\left(x, y(x),\ y'(x),\ y''(x)\right) dx \quad \text{minimal!}$$

mit den Randbedingungen $y(a) = \alpha_0,\ y'(a) = \alpha_1,\ y(b) = \beta_0,\ y'(b) = \beta_1$ betrachtet. Zeigen Sie: Falls f und die Lösung y genügend oft stetig differenzierbar sind, ist eine notwendige Bedingung an y die Euler-Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0\,,$$

wobei die Funktionen in $(x, y(x),\ y'(x),\ y''(x))$ mit $x \in [a, b]$ auszuwerten sind.

Aufgabe 45 :

Gesucht ist eine ebene Kurve der Länge l, sodass ihre Endpunkte auf der x-Achse liegen und die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse maximal wird. Führen Sie diese Fragestellung auf das folgende Variationsproblem zurück:

$$\int_0^l y(s)\sqrt{1 - \frac{dy}{ds}(s)^2}\; ds \quad \text{maximal!}\,, \quad y(0) = y(l) = 0\,.$$

Stellen Sie die Eulerschen Differentialgleichungen auf und lösen Sie diese. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Schreiben Sie die Euler-Gleichungen in der Form $y'(x)f(y(x)) = 1$ und integrieren Sie.

Aufgabe 46 :
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $U := \{x \in [a,b] : f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}$ die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen. Zeigen Sie: Wenn U höchstens endlich viele Häufungspunkte hat, dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

Aufgabe 47 :
Berechnen Sie

$$\int_A \cos(x+y+z)d(x,y,z) \qquad \text{wobei } A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Hinweis: $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2\cos\alpha$

Aufgabe 48 :
Berechnen Sie

$$\int_A |\cos(x+y)|d(x,y) \qquad \text{mit } A = [0,\pi] \times [0,\pi]$$

Es werden Lösungen für fünf Aufgaben gewertet. Diese werden so ausgewählt, dass Sie eine möglichst hohe Punktzahl erreichen.
Abgabe in der Vorlesungspause am 7.7.2009,
Besprechung in den Übungen am 9.7.2009 bzw. 10.7.2009