Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 9.6.2009

6. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 31 :
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f_1(x, y) = e^x \cos y$, $f_2(x, y) = e^x \sin y$. Zeigen Sie:

(a) f erfüllt in jedem Punkt die Voraussetzungen des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit.

(b) f ist nicht injektiv.

(c) Für $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < 2\pi\}$ ist $f|_U : U \to \mathbb{R}^2$ injektiv.

(d) Bestimmen Sie $f(U)$ und die inverse Abbildung $g : f(U) \to U$.

Aufgabe 32 :
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = e^{2x-y} + 3x - 2y - 1$. Zeigen Sie, dass sich $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ nach y auflösen läßt. Berechnen Sie $y'(0)$.

Aufgabe 33 :
Sei $z(x, y)$ durch die Gleichung

$$z = x + y\varphi(z)$$

mit stetig differentierbarer Funktion φ definiert. Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung $1 - y\varphi'(z) \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}$$

gilt.

Aufgabe 34 :
(Peano 1884, Annotazione N. 103) Zeigen Sie, dass für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die gemischten partiellen Ableitungen $\partial_x\partial_y f(0, 0)$ und $\partial_y\partial_x f(0, 0)$ existieren, aber

$$\partial_x\partial_y f(0, 0) \neq \partial_y\partial_x f(0, 0) .$$

Aufgabe 35 :
Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y^2$ um den Punkt $(1, 1)$ an.

Aufgabe 36 :

(Peano 1884, Annotazione N. 109) Die Taylor-Formel mit Restterm in Zwischenwertform gilt für Funktionen mehrerer Veränderlicher nur, falls alle auftretenden partiellen Ableitungen stetig sind (anders als im eindimensionalen Fall). Zeigen Sie, dass für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Formel

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)h + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)k$$

mit $\xi = x_0 + \theta h,\ \eta = y_0 + \theta k$ falsch sein kann.

Hinweis: Wählen Sie dazu $x_0 = y_0 = -a,\ h = k = a + b$.

Es werden Lösungen für fünf Aufgaben gewertet. Diese werden so ausgewählt, dass Sie eine möglichst hohe Punktzahl erreichen.
Abgabe in der Vorlesungspause am 23.6.2009,
Besprechung in den Übungen am 25.6.2009 bzw. 26.6.2009