Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.5.2009

5. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 25 :

Es sei $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar sei. Berechnen Sie

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$$

und zeigen Sie, dass

$$r^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)^2 = r^2\left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right)^2 .$$

Aufgabe 26 :

Für die differenzierbaren Funktionen $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelte

$$(*) \qquad \frac{dp_k}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\left(p(t), q(t)\right) \ , \quad \frac{dq_k}{dt}(t) = +\frac{\partial H}{\partial p_k}\left(p(t), q(t)\right) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $H\left(p(t), q(t)\right)$ einen konstanten Wert unabhängig von t annimmt.

Bemerkung: Die Hamiltonschen Gleichungen $(*)$ bestimmen die Bewegung eines mechanischen Systems mit Positionen $q(t)$ und Impulsen $p(t)$ zur Zeit t. Die Gesamtenergie $H\left(p(t), q(t)\right)$ bleibt dabei erhalten.

Aufgabe 27 :

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$. Zeigen Sie, dass mit $a = 0, b = 2\pi$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(b) - f(a) \neq f'(\xi)(b-a) .$$

Aufgabe 28 :

(Matrizennormen) Zeigen Sie für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

(a) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)
$\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)

(b) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$
$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \, \|A\|_\infty}$

(c) $\|A\|_2 = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^TA}$

Hinweise: zu (b) Cauchy-Schwarz; $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1 \, \|x\|_\infty$ für $x \in \mathbb{R}^n$
zu (c) Diagonalisierung $A^TA = Q^TDQ$ mit Orthogonalmatrix Q.

Aufgabe 29 :

Zeigen Sie: Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Operatornorm des Produkts beschränkt durch

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| .$$

Aufgabe 30 :

Seien $a > 0$ und die Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{a}{1+a}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ gegeben. Finden Sie den grössten Definitionsbereich D, sodass für alle abgschlossenen Intervalle $A \subset D$ die Funktion f die folgende Eigenschaft hat:

Es gibt ein $\alpha < 1$ sodass für alle $x, y \in A$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$.

Es werden Lösungen für fünf Aufgaben gewertet. Diese werden so ausgewählt, dass Sie eine möglichst hohe Punktzahl erreichen.
Abgabe in der Vorlesungspause am 9.6.2009,
Besprechung in den Übungen am 18.6.2009 bzw. 19.6.2009