Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 5.5.2009

3. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 13 :
Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

Sei weiter $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $x_0 \in (a, b)$. Berechnen Sie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(x) \frac{1}{\varepsilon} \phi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) dx \,.$$

Aufgabe 14 :
Zeigen Sie: Auf $C[a, b]$, dem Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$, sind durch

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

Normen gegeben, die zueinander nicht äquivalent sind.

Aufgabe 15 :
Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen sich zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lassen:

$$f(x, y) := \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\,, \quad g(x, y) := \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}\,, \quad h(x, y) := \frac{x y^2}{x^2 + y^6}\,, \quad u(x, y) := \frac{x^2 - y}{x^2 + y}.$$

Aufgabe 16 :
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen mit $A \neq \emptyset$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $K \neq \emptyset$, sowie $K \cap A = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Die Abstandsfunktion $x \mapsto d(x, A) := \inf \{\|x - a\| \,:\, a \in A\}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $b_x \in A$, so dass $d(x, A) = \|x - b_x\|$. Das obige Infimum ist also ein Minimum.

(c) Es gibt ein $q \in K$ und ein $c \in A$ mit

$$d(K, A) := \inf \{d(x, A) \,:\, x \in K\} = d(q, A) = \|q - c\| \; (> 0) \,.$$

(d) Geben Sie ein Beispiel abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $d(B, A) = 0$.

Aufgabe 17 :
Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß

$$f : \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| < 1\} \to \mathbb{R}^n \quad : \quad f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}$$

ein Homöomorphismus ist. Geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} an.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst den Fall $n = 1$.

Aufgabe 18 :
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^m$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, daß $f : K \to f(K)$ ein Homöomorphismus ist.

Abgabe in der Vorlesungspause am 12.5.2009,
Besprechung in den Übungen am 14.5.2009 bzw. 22.5.2009