Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 21.4.2009

1. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 1 :
Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn für alle $x_1 < x_2 < x_3$ aus (a, b) die folgenden Ungleichungen gelten

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} .$$

Aufgabe 2 :
Zeigen Sie, daß die Funktion $-\ln x$ auf $(0, \infty)$ konvex ist und beweisen Sie damit die Ungleichung zwischen dem gewichteten harmonischen und geometrischen Mittel:

Für beliebige positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ und positive $\theta_1, \ldots, \theta_n$ mit $\theta_1 + \ldots + \theta_n = 1$ gilt

$$\frac{1}{\left(\frac{\theta_1}{x_1} + \ldots + \frac{\theta_n}{x_n}\right)} \leq x_1^{\theta_1} \ldots x_n^{\theta_n} .$$

Aufgabe 3 :
Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie die Höldersche Ungleichung für Integrale:

Für stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} .$$

Hinweis: Riemann-Summen

Aufgabe 4 :
Sei $\| \cdot \|$ eine Norm. Zeigen Sie

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| .$$

Aufgabe 5 :
Zeigen Sie, dass für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $p \mapsto \|x\|_p$ auf $[1, \infty)$ monoton fallend ist.

Aufgabe 6 :
Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ genau dann bezüglich der Maximumnorm $\| \cdot \|_\infty$ gegen $a \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, wenn sie bezüglich der euklidischen Norm $\| \cdot \|_2$ gegen a konvergiert.

Hinweis: Die beiden Normen sind äquivalent.

Abgabe in der Vorlesungspause am 28.4.2009,
Besprechung in den Übungen am 30.4.2009 bzw. 8.5.2009