

## 14. Übungsblatt zur Analysis I

**Aufgabe 79:** Finden Sie den größten Definitionsbereich der Funktion  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin(nx)$  und zeigen Sie, dass  $f$  differenzierbar mit stetiger Ableitung ist.

**Aufgabe 80:** Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}$$

auf dem Intervall  $[0, b]$  mit  $0 < b < 1$  termweise integriert werden darf. Sie erhalten so die Arcustangens-Reihe.

**Aufgabe 81:** Zeigen Sie, dass für  $|x| < 1$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit sich selbst.

**Aufgabe 82:** Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{2^j} x^j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 x^{j^2}.$$

**Aufgabe 83:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dreimal stetig differenzierbar,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{h^2}{6} \max_{x \in [x_0-h, x_0+h]} |f'''(x)|.$$

Hinweis: Taylor.

**Aufgabe 84:**

Bestimmen Sie ein Polynom  $p(x)$  so, dass  $|\exp(x) - p(x)| < 10^{-2}$  für alle  $x \in [-1, 1]$ .

**Abgabe bis spätestens Montag 03.02.2025, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.**

**Eventuell Besprechung in den Übungen, Musterlösung wird hochgeladen**  
**Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de**