Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.11.2025

13. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 73: Zeigen Sie durch wiederholte partielle Integration, dass für nichtnegative ganze Exponenten m, n

$$\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^n}{n!} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!} .$$

Insbesondere ist

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} .$$

Aufgabe 74: Zeigen Sie, dass für positive ganze Zahlen n

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} .$$

Aufgabe 75: Seien die Funktionen $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x) .$$

Aufgabe 76: Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion für die Funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ und $h(x) = \frac{x}{x^2-6x+13}$.

Aufgabe 77: Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion für die Funktionen $u(x) = \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}$, und $v(x) = \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}$.

Aufgabe 78: Berechnen Sie $\int_0^1 x^n (\ln x)^n dx$ durch partielle Integration. Verwenden Sie dann die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion in $x^x = e^{x \ln x}$, um zu zeigen (Bernoulli 1697):

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \ldots .$$

Hinweis: Setzen Sie hierbei die Funktionen x^x und $x^n \ln(x)^n$ stetig auf das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ fort.

Abgabe bis spätestens Montag 27.01.2025, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.
Besprechung in den Übungen vom 29.01- 31.01.2025.
Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de