Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 13.01.2025

12. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 67: Seien $a_1, \dots, a_n \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: Wenn $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geq n$ für alle reellen x, dann ist $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$.

Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$ auf Extrema.

Aufgabe 68: Untersuchen Sie, ob die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{für } |x| \geq 1 \\ e - e^{x^2} & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = 1 - \sqrt{|x^2 - 1|} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Extremwerte besitzen.

Aufgabe 69: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \int_a^b |g(x)|dx$$

Aufgabe 70:

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $2 \int_0^1 f(x)dx = 1$. Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in (0, 1)$ mit $f(c) = c$.

Aufgabe 71:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, stetig auf $[a, b]$ ist.

Aufgabe 72: Berechnen Sie die Stammfunktionen:

$$\int \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \mathrm{d}x \ , \ \int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \mathrm{d}x \ , \int \arccos x \ \mathrm{d}x \ .$$

Abgabe bis spätestens Montag 20.01.2025, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.
Besprechung in den Übungen vom 22.01- 24.01.2025.
Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de