

10. Übungsblatt zur Analysis I

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Aufgabe 55: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $|f(x)| \leq x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ist f differenzierbar in 0? Beweisen Sie ihre Vermutung.

Aufgabe 56: Berechnen Sie die ersten Ableitungen der Funktionen $f(x) = e^{e^x}$, $g(x) = (e^e)^x$, $h(x) = e^{\cos x}$, $u(x) = x^x$.

Aufgabe 57: Geben Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen an und untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen differenzierbar nach x sind, und berechnen Sie die ersten Ableitungen, wenn diese existieren:

$$|x|, \quad \ln|x|, \quad A \cdot e^{-kx} \sin(\omega x), \quad x^{1/3}.$$

Aufgabe 58: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar auf \mathbb{R} ist und berechnen Sie die Ableitung f' . Ist f' stetig oder differenzierbar?

Aufgabe 59: Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf (a, b) . Zeigen Sie, dass dann $f \geq g$ auf $[a, b]$.

Beweisen Sie damit die Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung auf reelle Exponenten:

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \text{für } \alpha \geq 1 \text{ und } x \geq -1.$$

Unterscheiden Sie dabei die Fälle $x \geq 0$ und $-1 \leq x \leq 0$.

Aufgabe 60: Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Stellen Sie eine Vermutung für die allgemeine Form der n -ten Ableitung auf und beweisen Sie diese durch Induktion.

Abgabe bis spätestens Dienstag 07.01.2025, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.

Besprechung in den Übungen vom 08.01- 10.01.2025.

Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de