

9. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 49: Geben Sie für die Funktionenfolgen $(f_n), (g_n)$ mit

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{\frac{1}{n}},$$
$$g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{n}x^n$$

die Grenzfunktionen an. Untersuchen Sie dann die Folgen auf gleichmäßige Konvergenz und beweisen Sie Ihr Resultat.

Aufgabe 50: Zeigen Sie: Die Sinus-Reihe konvergiert gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall, nicht aber auf \mathbb{R} .

Aufgabe 51: Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^j$$

punktweise für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, aber auf $[-1, 1]$ nicht gleichmäßig konvergiert. Berechnen Sie $f(x)$. Ist die Funktion stetig?

Aufgabe 52: Zeigen Sie mithilfe eines Additionstheorems, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

Aufgabe 53: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periode T , d.h. $f(x) = f(x + T)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} ist.

Aufgabe 54: Sei eine Funktionenfolge (f_n) von gleichmäßig stetigen Funktionen gegeben. Zeigen Sie: Falls (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so ist f ebenfalls gleichmäßig stetig.

Abgabe bis spätestens Montag 16.12.2024, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.

Besprechung in den Übungen vom 18.12- 20.12.2024.

Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de