Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.12.2024

8. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 43: Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

stetig sind.

Aufgabe 44: Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:[-1,1]\to\mathbb{R}$, und $u:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, mit

$f(x)=x\cdot\sin(1/x)-2x$, falls $x\neq 0$ und $f(0)=0$,
$g(x)=\sin(1/x)$, falls $x\neq 0$ und $g(0)=0$.
$h(x)=(1/x)\cdot\sin(1/x)$, falls $x\neq 0$ und $h(0)=0$
$u(x)=(1/\sqrt{\sin x})-1$, falls $x\neq 0$, $x\neq\pi$ und $u(0)=u(\pi)=0$.

Welche Funktionen sind stetig?

Aufgabe 45: Welche der Funktionen aus Aufgabe 44 haben ein Maximum und welche ein Minimum im Definitionsbereich? Begründen Sie ihre Vermutung.

Aufgabe 46: Sei $f:[a,b]\to[a,b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f dann einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $c\in[a,b]$, sodass $f(c)=c$.
Hinweis: Betrachten Sie $g(x)=f(x)-x$.

Aufgabe 47: Sei eine Menge $A\subset\mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $x_0\in\mathbb{R}$ genau dann Häufungspunkt von A ist, wenn eine Folge (x_n) mit $x_n\in A$, $x_n\neq x_0$ existiert, sodass $x_n\to x_0$.

Aufgabe 48: Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}\,,\quad \lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\,,\quad \lim_{x\to+\infty} x\sin x$$

Abgabe bis spätestens Montag 09.12.2024, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.
Besprechung in den Übungen vom 11.12- 13.12.2024.
Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de