Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25.11.2024

7. Übungsblatt zur Analysis I

Wichtig: Ab diesem Übungsblatt werden 5 der 6 Aufgaben korrigiert. Welche 5 Aufgaben Sie abgeben, können Sie sich aussuchen. Falls Sie 6 Aufgaben abgeben, wird die letzte Aufgabe nicht korrigiert.

Aufgabe 37: Untersuchen Sie die folgende Reihe auf (absolute) Konvergenz oder Divergenz in Abhängigkeit des reellen Parameters a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Aufgabe 38: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme. Zeigen Sie:
Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, dann divergieren auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$.

Aufgabe 39: Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5 + (-1)^n}\right)^n .$$

Begründen Sie, warum das Quotientenkriterium keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz dieser Reihe liefert.

Zeigen Sie mithilfe eines anderen Konvergenzkriteriums, dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 40: Zeigen Sie, dass die Folge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

konvergiert. Schließen Sie dazu zunächst mithilfe von Aufgabe 10, dass

$$\frac{1}{n} > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} .$$

Zeigen Sie dann mit einer der beiden Ungleichungen, dass die Folge (s_n) monoton fallend ist und mithilfe der anderen Ungleichung, dass $s_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Der Grenzwert $\gamma = \lim_{n\to\infty} s_n$ dieser Folge wird als Euler-Mascheroni-Konstante bezeichnet.

Aufgabe 41: Sei (x_n) eine reelle Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \ \ (= \exp(x)) .$$

Aufgabe 42: Rechtfertigen Sie die gliedweise Grenzwertnahme in der Bernoulli-Eulerschen Herleitung der Sinus- und Cosinus-Reihe (s. Kapitel I, §4.3 der Vorlesung).

Abgabe bis spätestens Montag 02.12.2024, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.
Besprechung in den Übungen vom 04.12- 06.12.2024.
Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de