

6. Übungsblatt zur Analysis I

Wichtig: Beachten Sie bei der Bearbeitung der Übungsblätter, dass wenn in einer Aufgabe ein Hinweis gegeben wird, die Gültigkeit desselben auch bewiesen werden muss.
Wegen des Studientags entfällt die Vorlesung am Mittwoch 20.11.2024.

Aufgabe 31: Bestimmen Sie die Häufungspunkte, \sup , \inf , \limsup und \liminf der Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$u_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2}.$$

Aufgabe 32: Zeigen Sie: Ist s der einzige Häufungspunkt einer beschränkten reellen Folge (s_n) , so konvergiert die Folge gegen s .
Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dies für unbeschränkte Folgen nicht gilt.

Aufgabe 33: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern und $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ die n -te Partialsumme.
Zeigen Sie:

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergieren auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

Hinweis: Für $x, y > 0$ gilt $2\sqrt{xy} \leq x + y$.

Aufgabe 34: Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ das Verhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^{\alpha}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{1}{4n} \leq \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2 \leq \frac{1}{2n+1}$.

Aufgabe 35: Untersuchen Sie die folgende Reihe auf (absolute) Konvergenz oder Divergenz in Abhängigkeit der reellen Parameter x und s :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe benötigt das Wurzel- oder Quotientenkriterium, welche in der Vorlesung noch nicht behandelt wurden. Sie ist daher zur freiwilligen Bearbeitung und geht nicht in die Wertung ein. Die Aufgabe kann trotzdem abgegeben werden um bis zu 4 Bonuspunkte für die Zulassung zu sammeln.

Aufgabe 36: Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Arcustangens-Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

konvergiert.

Abgabe bis spätestens Montag 25.11.2024, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.

Besprechung in den Übungen vom 27.11- 29.11.2024.

Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de