

#### 4. Übungsblatt zur Analysis I

**Aufgabe 19:** Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von

$$z = \frac{-6 + 17i}{3 + 4i}$$

und schreiben Sie  $z$  in Polardarstellung.

**Aufgabe 20:** Für eine komplexe Zahl  $z$  kann man

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

definieren. Zeigen Sie, dass die Additionstheoreme auch für diese Funktionen gelten, d.h. zeigen Sie

$$\begin{aligned} \sin(z + w) &= \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w), \\ \cos(z + w) &= \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w). \end{aligned}$$

**Aufgabe 21:** Zeigen Sie, dass

$$\arctan x = -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{1 + ix}{1 - ix} \right).$$

**Aufgabe 22:** Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Lösungen der Gleichung  $z^4 = 1$ .

**Aufgabe 23:** Zeigen Sie für alle  $a, b \in \mathbb{Q}$ :

(a)  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .

(b)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$ .

**Aufgabe 24:** Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

sowie

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k \right| = \prod_{k=1}^n |a_k|.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &:= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ \prod_{k=1}^n a_k &:= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n. \end{aligned}$$

**Abgabe bis spätestens Montag 11.11.2024, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.**

**Besprechung in den Übungen vom 13.11- 15.11.2024.**

**Ansprechperson: Maximilian Flamm - [maximilian.flamm@uni-tuebingen.de](mailto:maximilian.flamm@uni-tuebingen.de)**