

4. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 19: Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von

$$z = \frac{-6 + 17i}{3 + 4i}$$

und schreiben Sie z in Polardarstellung.

Aufgabe 20: Für eine komplexe Zahl z kann man

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

definieren. Zeigen Sie, dass die Additionstheoreme auch für diese Funktionen gelten, d.h. zeigen Sie

$$\begin{aligned} \sin(z + w) &= \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w), \\ \cos(z + w) &= \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w). \end{aligned}$$

Aufgabe 21: Zeigen Sie, dass

$$\arctan x = -\frac{i}{2} \ln \left(\frac{1 + ix}{1 - ix} \right).$$

Aufgabe 22: Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$.

Aufgabe 23: Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Q}$:

(a) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

(b) $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Aufgabe 24: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

sowie

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k \right| = \prod_{k=1}^n |a_k|.$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &:= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ \prod_{k=1}^n a_k &:= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n. \end{aligned}$$

Abgabe bis spätestens Montag 11.11.2024, 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ ihrer Tutorin.

Besprechung in den Übungen vom 13.11- 15.11.2024.

Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de