

2. Übungsblatt zur Analysis I

Wichtig: Die Übungsgruppen am Freitag den 01.11. entfallen. Nähere Infos folgen per Mail.

Aufgabe 7: Weisen Sie folgende Formel von Euler nach:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1 \cdot 3}{100 \cdot 200} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{100 \cdot 200 \cdot 300} + \text{etc.} \right)$$

Berechnen Sie die außerdem ersten fünf Teilsummen der Reihe.

Hinweis: Verwenden Sie $50 = 2 \cdot 5^2$ und die Reihe für $(1-x)^{-1/2}$ mit einem geeigneten x .

Aufgabe 8: Indem Sie die Reihe $(1+x)^{1/3} = 1+ax+bx^2+cx^3+\dots$ zweimal mit sich selbst multiplizieren, bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c . Weisen Sie damit unter Beachtung von $2 \cdot 4^3 - 5^3 = 3$ die folgende Formel nach:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 125} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot (125)^2} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (125)^3} - \dots \right).$$

Geschichtliche Notiz: Die Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$ war ein berühmtes Problem der griechischen Mathematik (Verdopplung des Volumens des Würfels).

Aufgabe 9: (Bernoullische Ungleichung, Jac. Bernoulli 1689) Zeigen Sie durch Induktion über n :

(a) $(1+a)^n \geq 1+na$ für $a \geq -1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(b) $1-na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}$ für $0 < a < 1$, $n = 2, 3, \dots$

Aufgabe 10: Betrachten Sie die Folgen $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Zeigen Sie:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < e < \dots < b_3 < b_2 < b_1 \quad \text{und} \quad b_n - a_n \leq \frac{4}{n}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 9.

Aufgabe 11: Sei $M \geq N \geq 2x \geq 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=N}^M \frac{x^n}{n!} \leq 2 \frac{x^N}{N!}.$$

Schließen Sie daraus

$$e^x - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \leq 2 \frac{x^N}{N!}.$$

Aufgabe 12: Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion für große Argumente stärker als polynomial anwächst, genauer: Zu jeder natürlichen Zahl n existiert ein x_n , so daß für alle $x \geq x_n$ die Ungleichung $e^x \geq x^n$ gilt.

**Abgabe bis spätestens Montag 28.10. 12:15 Uhr im Briefkasten ihres Tutors/ihrer Tutorin.
Besprechung in den Übungen vom 30.10.-31.10.
Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de**