Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 16.10.2024

1. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 1: Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 \quad \text{und}$$

$$1^4 + 3^4 + 5^4 + \ldots + (2n+1)^4.$$

Aufgabe 3: Geben Sie eine Formel für das Interpolationspolynom (vom Grad höchstens n), das an den Stellen $x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh$ die Werte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ annimmt.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, daß

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0\,.$$

Aufgabe 5: Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ sei $y_n = n^k$ mit einem positiven ganzen Exponenten k.

(a) Zeigen Sie, daß $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ ein Polynom vom Grad $k-1$ in n ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\Delta^{k+1} y_n = 0$.

Aufgabe 6: Zeigen Sie für die n-ten Differenzen einer Folge $y_0, y_1, y_2, \ldots,$ daß

$$\Delta^n y_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} y_{n-j}\,.$$

Freiwillige Bearbeitung und keine Abgabe.
Besprechung in den Übungen vom 23.-25.10.2024.
Ansprechperson: Maximilian Flamm - maximilian.flamm@uni-tuebingen.de