1 Vollständige Induktion

Beispiel 1.1. (Kleiner Gauß)
Für jedes $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ gilt $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}$.

(Hier ist $n_0 = 1$, siehe nächste Seite).

Beweis. Vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{0} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

IS: $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1}{2} \,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= 1 + 2 + \ldots + n + n + 1 = (1 + 2 + \ldots + n) + n + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 && \text{(IV)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + n + 2n + 1}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \,.
\end{aligned}$$

□

1.1 Was ist vollständige Induktion und wofür wird sie verwendet?

Vollständige Induktion ist eine Beweistechnik, die eng mit der Zahlenmenge der natürlichen Zahlen verwoben ist. Sie wird verwendet, um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$, die von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ abhängt, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, für das $n \geq n_0$ für einen Startwert $n_0 \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Meistens ist $n_0 \in \{0, 1\}$.
Dabei geht man wie folgt vor:

1. Man zeigt die Gültigkeit von $A(n_0)$(der Induktionsanfang „IA“)
2. Man nimmt $A(n)$ für ein beliebiges aber festes $n \geq n_0$ als richtig an (Induktionsvoraussetzung/Induktionsannahme „IV“) und folgert daraus die Gültigkeit von $A(n+1)$ (Induktionsschritt „IS“).

1.1.1 Wieso genügt das für einen formalen Beweis?

Wir wollen also zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$ gezeigt ist, falls wir 1. und 2. gezeigt haben. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ beliebig. Nach 1. gilt $A(n_0)$. Wegen 2. ist dann $A(n_0 + 1)$ richtig (wähle $n = n_0$ in 2.). Wieder wegen 2. ist dann $A(n_0 + 2)$ richtig (wähle $n = n_0 + 1$ in 2.). Iterieren wir dieses Vorgehen $n - n_0$ mal, erhalten wir die Richtigkeit von $A(n_0 + n - n_0) = A(n)$.
Dies kann man sich auch anhand des Dominoeffekts veranschaulichen: Nehme z.B. $n_0 = 1$ und stelle für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0 = 1$ (also für jedes $n \in \mathbb{N}$) einen Dominostein auf. Die Aussage „$A(n)$ ist richtig“ soll dabei bedeuten, dass der n-te Dominostein umfällt. 1. besagt nun, dass wir den 1-ten Dominostein umschubsen dürfen ($A(1)$ ist richtig).
2. besagt, dass wir die Dominosteine so aufstellen dürfen, dass mit dem Fallen des n-ten Steins ($A(n)$ ist richtig) auch der $(n+1)$-te Stein fällt ($A(n+1)$ ist richtig). Wenn 1. und 2. gleichzeitig erfüllt sind, werden also schlussendlich alle Dominosteine umfallen (also gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$)-

Beispiel 1.1.1. (Teleskopsumme)
Seien $a_i \in \mathbb{R}$ (=: reelle Zahlen) für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{n+1}}_{A(n)} .$$

(Hier ist wieder $n_0 = 0$.)

Dies leuchtet auch unmittelbar ein, wenn man es sich mit der $\ldots$-Notation aufschreibt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i+1}) &= (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 + (-a_1 + a_1) + (-a_2 + a_2) + \ldots + (-a_n + a_n) - a_{n+1} \\ &= a_0 - a_{n+1} .\end{aligned}$$

Der saubere Beweis gelingt mit Induktion. Anhand dieses Beispiels klären wir, wie man formal einen Induktionsbeweis für die Übungen aufschreibt:
Seien $a_i \in \mathbb{R}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Behauptung 1.1.2.
Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{n+1}\,.$$

Beweis. Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{0}(a_{i+1} - a_i) = a_0 - a_1 = a_0 - a_{n+1}\,.$$

IV: Es gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{n+1}\,.$$

IS: $n \mapsto n+1$. Zu zeigen ist

$$\sum_{i=0}^{n+1}(a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{(n+1)+1}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1}(a_i - a_{i+1}) &= \sum_{i=0}^{n}(a_i - a_{i+1}) + a_{n+1} - a_{(n+1)+1} \\ &= a_0 - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} \qquad \text{(IV)} \\ &= a_0 - a_{(n+1)+1}\,,\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

□

Beispiel 1.1.3. (Geometrische Summe)
Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ beliebig. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{A(n)}\,.$$

(Hier wieder $n_0 = 0$.) Zwei Beweise:

(a) *Beweis.* Beweis durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

IV: Gelte also für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

IS: $n \mapsto n+1$: Zu zeigen ist

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= q^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} q^i \\
&= q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} && \text{(IV)} \\
&= \frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}\,,
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

□

(b) *Beweis.* Beweis unter Verwendung der Teleskopsumme. Es genügt auch für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen

$$(1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 - q^{n+1}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
(1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i &= \sum_{i=0}^{n}(1-q)q^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}(\underbrace{q^i}_{=:a_i} - q^{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(a_i - a_{i+1}) \\
&= a_0 - a_{n+1} && \text{(Teleskopsumme)} \\
&= q^0 - q^{n+1} \\
&= 1 - q^{n+1}\,,
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. □

Beispiel 1.1.4. (Indexshift)
Seien wieder $a_i \in \mathbb{R}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k}}_{A(n)} .$$

(Hier: $n_0 = 0$.)

Beweis. Seien also $a_i \in \mathbb{R}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$: Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{0} a_i = a_0 = a_{k-k} = \sum_{i=k}^{k} a_{i-k} = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k} . \qquad (k - k = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N})$$

IV : Es gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k} .$$

IS $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i = \sum_{i=z}^{(n+1)+k} a_{i-k} = \sum_{i=k}^{n+k+1} a_{i-k} .$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} a_i &= \sum_{i=0}^{n} a_i + a_{n+1} \\
&= \sum_{i=k}^{n+k} a_{i-k} + a_{n+1} && \text{(IV)} \\
&= \sum_{i=k}^{n+k+1} a_{i-k} + a_{n+1+k-k} \\
&= \sum_{i=z}^{n+k+1} a_{i-k} \\
&= \sum_{i=z}^{n+1+k} a_{i-k}
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

□

Hausaufgabe 1.1.5. (freiwillig)
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq 3$ gilt $2^n \geq n^2$. Bei welchem $n \in \mathbb{N}_0$ starten wir die Induktion, d.h. wie sieht $n_0 \in \mathbb{N}_0$ hier aus? Antwort: $n_0 = 4$. Rechne $A(n)$ für $n \in \{0, 1, 2\}$ explizit nach.

Beweis. $n = 0$: $0 \geq 0$, $n = 1$: $2 \geq 1$, $n = 2$: $4 \geq 4$. Rest mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

IA: $n = 4$: Es gilt $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$.

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit dass $2^n \geq n^2$.

IS: $n \mapsto n + 1$: Zu zeigen ist $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$. Es gilt aber

$$\begin{aligned}
2^{n+1} = 2 \cdot 2^n &\geq 2n^2 && \text{(IV)} \\
&= n^2 + n^2 \\
&\geq n^2 + 4n && (n \geq 4) \\
&= n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.1.6.
Beispiel 1.1.4 lässt sich auch wie folgt formulieren: Seien $a_i \in \mathbb{R}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=k}^{n+k} a_i .$$

Beispiel 1.1.7. (Restreihe der geometrischen Reihe)
In der Vorlesung haben wir die geometrische Reihe kennengelernt. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i := q^0 + q^1 + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q} ,$$

für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ (alternativ formuliert: $q \in (-1, 1) := \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\}$). Dieser Ausdruck für die geometrische Reihe ist äquivalent zur Formulierung

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

mit $|x| < 1$ aus der Vorlesung. Man kann die Formel mit Hilfe der geometrischen Summe beweisen. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} q^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} .$$

Können wir daraus auch

$$\sum_{i=k}^{\infty} q^i = q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \ldots$$

für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ berechnen? Zwei Ideen:

(a) Benutze den Indexshift Beispiel 1.1.4: Setze $a_i \coloneqq q^i$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{\infty} q^i &= q^k + q^{k+1} + \dots \\
&= \lim_{m\to\infty} (q^k + q^{k+1} + \dots + q^m) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m} q^i \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m} q^i \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m-k+k} q^i \underbrace{q^0}_{=1} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m-k+k} q^i q^{k-k} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m-k+k} \underbrace{q^{i-k}}_{=a_{i-k}} q^k \\
&= q^k \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{(m-k)+k} a_{i-k} \\
&= q^k \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-k} a_i && \text{(Beispiel 1.1.4 mit } n \coloneqq m-k) \\
&= q^k \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-k} q^i \\
&= q^k \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\
&= q^k \frac{1}{1-q}
\end{aligned}$$

(b) Alternativ gilt mit Bemerkung 1.1.6

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{\infty} q^i &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m} q^i \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m-k+k} a_i \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-k} a_{i+k} && \text{(Bemerkung 1.1.6 mit } n := m-k) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m-k} q^{i+k} \\
&= q^k \sum_{i=0}^{\infty} q^i \\
&= q^k \frac{1}{1-q} .
\end{aligned}$$

(c) Wir addieren die fehlenden k Summanden und ziehen sie wieder ab:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{\infty} q^i &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k}^{m} q^i \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=k}^{m} q^i + \sum_{i=0}^{k-1} q^i - \sum_{i=0}^{k-1} q^i \right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} q^i - \sum_{i=0}^{k-1} q^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} q^i - \sum_{i=0}^{k-1} q^i \\
&= \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{(k-1)+1}}{1-q} && \text{(Beispiel 1.1.3 mit } n := k-1) \\
&= \frac{q^k}{1-q} .
\end{aligned}$$

Satz 1.1.8. ***(Binomischer Lehrsatz)***
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} .$$

Beweis. Durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 1$: Es gilt

$$(x+y)^n = (x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} x^j y^{1-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} .$$

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}\,.$$

IS: $n \mapsto n+1$: Zu zeigen ist

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j} && \text{(IV)}\\
&= x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j} + y\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n-j}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j}\\
&= x^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j} + y^{n+1}\\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}x^{(j-1)+1} y^{n-(j-1)} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j} + y^{n+1}\\
& && \text{(Indexshift in erster Summe um 1 nach oben, $(*)$)}\\
&= x^{n+1} + + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}x^{j} y^{n+1-j} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j} + y^{n+1}\\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}x^{j} y^{n+1-j} + \binom{n}{j}x^j y^{n+1-j}\right) + y^{n+1}\\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right)x^j y^{n+1-j} + y^{n+1}\\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} && \text{(Übung)}\\
&= \underbrace{\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^{n+1-(n+1)}}_{j=n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^j y^{n+1-j} + \underbrace{\binom{n+1}{0}x^0 y^{n+1-0}}_{j=0}\\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j y^{n+1-j}
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ wähle $a_j := \binom{n}{j}x^{j+1}y^{n-j}$. Dann ist $a_{j-1} = \binom{n}{j-1}x^{(j-1)+1}y^{n-(j-1)} = \binom{n}{j-1}x^j y^{n+1-j}$

und mit 1.1.4 angewendet auf $k \coloneqq 1$ folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} x^{j+1} y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \sum_{j=0+1}^{n-1+1} a_{j-1} = \sum_{j=1}^{n} a_{j-1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^{(j-1)+1} y^{n-(j-1)} .$$

$\square$

2 Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

Satz 2.1.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ mit $a_i > 0$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} .$$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Lemma 2.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Setze $A_k \coloneqq \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k}$ für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt

$$A_k^k \geq a_k^{\frac{1}{k}} A_{k-1}^{\frac{k-1}{k}} .$$

Beweis. Es gilt $\frac{A_k}{A_{k-1}} > 0$, somit $\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1 > -1$. Mit der Ungleichung von Bernoulli folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k &= \left(1 + \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right)\right)^k \\
> 1 + k(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1) \\
&= \frac{A_{k-1}}{A_{k-1}} + \frac{kA_k}{A_{k-1}} - \frac{kA_{k-1}}{A_{k-1}} \\
&= \frac{kA_k - (k-1)A_{k-1}}{A_{k-1}} \\
&= \frac{a_k}{A_{k-1}} .
\end{aligned}$$

Durchmultiplizieren mit A_{k-1}^k ergibt

$$A_k^k \geq a_k A_{k-1}^{k-1} ,$$

oder äquivalent

$$A_k \geq a_k^{\frac{1}{k}} A_{k-1}^{\frac{k-1}{k}} .$$

$\square$

Beweis. **von Satz 2.1** Vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

IA: $n = 2$: Am Bild gezeigt.

IV: Gelte also für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und alle reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n$ mit $a_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dass

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \,.$$

IS: $n \mapsto n+1$. Zu zeigen ist: Für alle reellen Zahlen $a_1, \dots, a_{n+1}$ mit $a_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n} \,.$$

Es gilt mit vorigem Lemma

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} &= A_{n+1} \geq a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} A_n^{\frac{n}{n+1}} \ldots && \text{(Lemma 2.2)} \\
&= a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \\
&\geq \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \left(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} && \text{(IV)} \\
&= \sqrt[n+1]{a_{n+1}} (a_1 \cdots a_n)^{\frac{n}{n+1} \frac{1}{n}} \\
&= \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n} \\
&= \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1}} \,.
\end{aligned}$$

□

Beweis. **Zweiter Beweis von Satz 2.1**
Setze $f(x) := e^{x-1} - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{x-1} - 1 \\
f''(x) &= e^{x-1} > 0 \,.
\end{aligned}$$

Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 1$. Wegen $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ handelt es sich dabei um ein globales Minimum von f. Das heißt es gilt $e^{x-1} - 1 = f(x) \geq f(1) = e^{1-1} - 1 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Umgestellt ergibt das

$$x \leq e^{x-1} \,,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenden wir diese Ungleichung nun jeweils auf $\frac{a_1}{A_n}, \dots, \frac{a_n}{A_n}$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{A_n} \cdots \frac{a_n}{A_n} &\leq e^{\frac{a_1}{A_n} - 1} \cdots e^{\frac{a_n}{A_n}} \\
&= e^{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{A_n} - n} \\
&= e^{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right)} - n} \\
&= e^{n-n} = e^0 = 1 \,.
\end{aligned}$$

Also

$$a_1 \cdots a_n \leq A_n^n\,.$$

Ziehen wir die n-te Wurzel erhalten wir

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\,.$$

$\square$

3 Komplexe Zahlen

3.1 Wieso beschäftigen wir uns überhaupt mit komplexen Zahlen?

Eine Motivation für die Konstruktion von 'größeren' Zahlenmengen als die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ ist das Lösen von Gleichungen:

(a) $\mathbb{Z}$: Lösen von $x + 2 = 1$. Keine Lösung in $\mathbb{N}_0$. Lösung $x = -1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$

(b) $\mathbb{Q}$: Lösen von $2x = 1$. Keine Lösung in $\mathbb{Z}$. Lösung: $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

(c) $\mathbb{R}$: Lösen von $x^2 = 2$. Keine Lösung in $\mathbb{Q}$. Lösung: $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(d) $\mathbb{C}$: Lösen von $x^2 + 1 = 0$. Keine Lösung in $\mathbb{R}$. Lösung: $x = i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$.

Man kann sogar zeigen (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes nicht-konstante Polynom $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ (mit $n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$) hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Oder anders gesagt: f zerfällt in Linearfaktoren, das heißt

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)\,,$$

wobei $z_1, \ldots, z_n$ die Nullstellen von f sind. Zwei weitere Beispiele:

(1) Es gibt Formeln zur Lösung von Gleichungen der Form $x^3 + px + q = 0$ (ähnlich zur Mitternachtsformel für $ax^2 + bx + c = 0$), diese sind bekannt unter dem Namen <u>Cardanische Formeln</u>. Eine dieser Formeln beinhaltet den Term

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,.$$

Der Term unter der Wurzel kann negativ werden, selbst wenn alle drei Lösungen der Gleichung reell sind (dies kommt bei der Mitternachtsformel nicht vor).

(2) Berechnung von Integralen über die reelle Achse (Analysis 4 bzw. Funktionentheorie): Betrachte etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^3} \mathrm{d}x = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} \frac{1}{(1 + x^2)^3} \mathrm{d}x\,.$$

Wir betrachten dies als komplexes Integral über den 'Weg' $[-c, c]$ und erweitern um einen Halbkreis, um einen geschlossenen 'Weg' zu erhalten. Ein Satz aus der Funktionentheorie (Residuensatz) sagt uns dann, dass das Integral nur von den Polstellen $i, -i$ abhängt und man erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3} \mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8} \,.$$

3.2 Definition der komplexen Zahlen

Zwei Möglichkeiten:

(a) Wir definieren einfach $i := \sqrt{-1}$. Wenn wir jetzt so tun, als könnten wir mit dieser Zahl rechnen wie gewohnt, dann gilt $i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1$. Damit können wir aus algebraischer Sicht Lösungen von diversen Nullstellenproblemen formulieren. Am Beispiel der Vorlesung: Das Polynom $x^2 - 10x + 40$ hat die Nullstellen

$$5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{-1 \cdot 15} = 5 \pm \sqrt{-1}\sqrt{15} = \underbrace{5}_{\in \mathbb{R}} \pm i \underbrace{\sqrt{15}}_{\in \mathbb{R}} \,.$$

Nachtrag: Die Schreibweise $i := \sqrt{-1}$ liefert eine intuitive Anschauung wie man auf die Zahl i kommt, allerdings sollte man i lieber über $i^2 := 1$ definieren, denn: wenn $i = \sqrt{-1}$, dann gilt

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \,.$$

Dies passiert nicht, wenn man stattdessen einfach $i^2 = 1$ fordert. Das legt die folgende Defintion nahe: Eine komplexe Zahl ist eine Zahl der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und i, die imaginäre Zahl, ist definiert durch $i^2 := -1$. Wir nennen $a =: \mathrm{Re}(z)$ den Realteil von z und $b =: \mathrm{Im}(z)$ den Imaginärteil von z. Dann setzen wir $\mathbb{C} := \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$.

(b) In der linearen Algebra habt ihr gelernt, was man in der Mathematik unter einem Körper versteht. Ein Körper ist eine Menge K, versehen mit zwei Abbildungen $\oplus : K \times K \to K$ und $\odot : K \times K \to K$, so dass einige 'sinnvolle' Eigenschaften erfüllt sind. Zum Beispiel: Für $a, b, c \in K$ gilt $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (diese Eigenschaft heißt Assoziativität). Der Körper ist die mathematische Formalisierung und Verallgemeinerung des Rechensystems, das wir ganz intuitiv schon immer benutzen. Wissen: Auf $\mathbb{R}$ können wir $\oplus = +$ und $\odot = \cdot$ wählen, also die ganz intuitive Addition und Multiplikation verwenden. Dann ist $\mathbb{R}$, versehen mit $+, \cdot$ ein Körper (man schreibt auch $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper). Eine natürliche Fragestellung in der Mathematik ist dann, ob wir auch auf $\mathbb{R}^n$ (vielleicht sogar für alle $n \in \mathbb{N}$) Verknüpfungen $\oplus, \odot$ definieren können, so dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Körper wird. Für den Fall $n = 2$: Seien $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ beliebig und definiere $\oplus, \odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \odot (c, d) &:= (ac - bd, ad + cb) \,. \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ ein Körper mit Nullelement $(0,0)$ und Einselement $1_{\mathbb{R}^{\neq}} := (1,0)$. Setzen wir $i := (0,1)$ so ergibt sich

$$i^2 = i \odot i = (0,1) \odot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1,0) = -1_{\mathbb{R}^2}\,.$$

(c) Über 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen: Setze

$$\begin{aligned} 1_M &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ i &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_M\,.$$

3.3 Wichtige Begrifflichkeiten und Eigenschaften rund um komplexe Zahlen

Seien $z = a + ib$ und $w = c + id$ komplexe Zahlen.

(a) Addition: Es ist $z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i$.

(b) Multiplikation: Es ist

$$zw = (a+ib)(c+id) = ac + ibc + aid + ibid = ac + (bc - ad)i + i^2bd = (ac - bd) + (bc - ad)i\,.$$

(c) Betrag: Setze $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Dies ist nach dem Satz des Pythagoras der Abstand von z zum Ursprung $(0,0)$ in der komplexen Zahlenebene.

(d) Komplexe Konjugation: Wir setzen $\overline{z} := a - ib$.

(e) Eulersche Identität: Es gilt

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,.$$

Mit dieser Identität erhalten wir auch

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1\,,$$

also

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,.$$

Diese Gleichung ist für Mathematiker sehr schön, denn sie enthält e, π, i als 'wichtigste' Zahlen in der Mathematik und die neutralen Elemente der Multiplikation (die 1) und Addition (die 0). Weiter erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 + i \cdot 0 = 1\,.$$

Beispiel 3.3.1. (Quotient komplexer Zahlen)
Betrachte die komplexen Zahlen

$$z := \frac{1+i}{1-i}$$
$$w := \frac{1+4i}{3+i}\,.$$

Wir wollen $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ und $\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w)$ bestimmen. Dazu erweitern wir mit dem Komplex-Konjugierten des Nenners.

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i\,,$$

also Re(z) $= 0$, $\mathrm{Im}(z) = 1$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} w = \frac{1+4i}{3+i} &= \frac{(1+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \\ &= \frac{3+12i-i-4i^2}{9-i^2} \\ &= \frac{7+11i}{10} = \frac{7}{10} + \frac{11}{10}i\,, \end{aligned}$$

also $\mathrm{Re}(w) = \frac{7}{10}$ und $\mathrm{Im}(w) = \frac{11}{10}$.

Beispiel 3.3.2. (Potenzen von Komplexen Zahlen)
Wir möchten i^i berechnen. Dazu betrachten wir

$$i^i = e^{\log(i^i)} = e^{i\log(i)}\,.$$

Zur Berechnung von $\log(i)$ betrachte $\log(i) = x \Leftrightarrow e^x = i$, da log Umkehrfunktion von e.

$$\begin{aligned} i = e^x = e^{-i^2 x} = e^{i(-ix)} &= e^{iy} && (y := -ix) \\ &= \cos(y) + i\sin(y)\,. && \text{(Euler-Identität)} \end{aligned}$$

Dies ist zum Beispiel für $y = \frac{\pi}{2}$ richtig, denn $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Damit $\frac{\pi}{2} = y = -ix$, also $\log(i) = x = \frac{i\pi}{2}$. Eingesetzt ergibt das

$$i^i = e^{i\log(i)} = e^{i\frac{i\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}\,.$$

Bemerkung 3.3.3.
In Beispiel 3.3.2 wäre auch $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ eine sinnvolle Lösung gewesen und damit $\log(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$. Die komplexe e-Funktion ist periodisch mit Periode $2\pi i$, d.h. nicht injektiv und wir müssen sie geeignet einschränken um sie umkehren zu können. Oft schränkt man die e-Funktion auf $M := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi]\}$ ein. Damit also $\log(i) = i\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \in M$ gilt, muss $k = 0$ sein, also $y = \frac{\pi}{2}$. Die Umkehrfunktion log von e auf M nennt man oft den <u>Hauptzweig des Logarithmus</u>.

Bemerkung 3.3.4. (Polarkoordinaten)
Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl, also $a, b \in \mathbb{R}$. Wir können z durch $r \coloneqq |z|$, also seine Entfernung vom Ursprung und den Drehwinkel φ eindeutig (bis auf Vielfache von 2π) darstellen, wobei wir (wie in der Mathematik üblich) gegen den Uhrzeigersinn drehen. Es gilt dann $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Im ersten Quadranten, also $a > 0, b > 0$: $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$, sowie $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$, somit $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$. Also $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.
Falls $a = 0$ und $b > 0$, also falls wir uns auf der imaginären Achse befinden, gilt offensichtlich $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
Im zweiten Quadranten, also $a < 0, b > 0$: Sei in diesem Fall α der Winkel der von der x-Achse und der Strecke vom Ursprung nach z (mit Länge r) eingeschlossen wird. Dann gilt $\varphi = \pi - \alpha$. Dann ist $\cos(\alpha) = \frac{-a}{r}$ und $\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$. Also $\tan(\alpha) = -\frac{b}{a}$ und somit $\alpha = \arctan(-\frac{b}{a}) = -\arctan(\frac{b}{a})$. Damit

$$\varphi = \pi - \alpha = \pi - \left(-\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \frac{\pi}{2}(= \arctan(\infty)) & a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}(= \arctan(-\infty)) & a = 0 \text{ und } b < 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}.$$

φ heißt <u>Argument</u> von z und wird oft mit $\arg(z)$ bezeichnet. Allgemein kann man zeigen: Für jedes $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $r \coloneqq |z|$ gilt immer $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ und $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$. Im ersten Quadranten ist das klar. Am Beispiel des zweiten Quadranten, also $a < 0, b > 0$: Mit α wie oben gilt $\varphi = \pi - \alpha$. Damit

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \cos(\pi - \alpha) \\ &= -\cos(-\alpha) && \text{(Mit Addtionstheoremen)} \\ &= -\cos(\alpha) && \text{(cos gerade Funktion)} \\ &= -\frac{-a}{r} \\ &= \frac{a}{r}. \end{aligned}$$

Analog $\sin(\varphi) = \frac{b}{a}$. Daraus erhalten wir.

$$\begin{aligned} z = a + bi &= r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)i \\ &= r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= re^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Vielfache von 2π, das heißt falls $r_1e^{i\varphi_1} = r_2e^{i\varphi_2}$, so folgt $r_1 = r_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2 + k(2\pi)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Versuchen wir nun, die Zahlen $z = i, w = \frac{7}{10} + \frac{11}{10}i$ aus vorigem Beispiel in Polarkoordinaten zu schreiben. Klar: $z = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Es gilt weiter $|w| = \sqrt{\frac{7^2+11^2}{10^2}} = \frac{\sqrt{170}}{10}$, und wegen $a > 0$ ergibt sich

$$\arg(w) = \arctan\left(\frac{\frac{11}{10}}{\frac{7}{10}}\right) = \arctan\left(\frac{11}{7}\right) = 1.00406711\,.$$

Also $w = \frac{\sqrt{170}}{10} \cdot e^{i \cdot 1.00406711}$.

Bemerkung 3.3.5.
Mit den Polarkoordinaten kann man i^i etwas eleganter berechnen:

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}\,.$$

Beispiel 3.3.6.
Wir möchten alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^5 = 2$ bestimmen. Hier erweisen sich die Polarkoordinaten als besonders sinnvoll: Wir schreiben $z = re^{i\varphi}$ und $2 = 2 \cdot e^{i\cdot 0}$. Dann gilt $z^5 = 2$ genau dann, wenn

$$r^5 e^{i(5\varphi)} = (re^{i\varphi})^5 = 2 = 2 \cdot e^{i\cdot 0}\,.$$

Aus der Eindeutigkeit der Polarkoordinatendarstellung folgt $r^5 = 2$ und $5\varphi = 0 + k2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Das heißt $r = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$ und

$$\varphi = \frac{2k\pi}{5} \in \{\frac{-4\pi}{5}, \frac{-2\pi}{5}, 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{10\pi}{5} = 2\pi, \dots\} =: M\,.$$

Nun gilt aber für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i\frac{2k\pi}{5}} = e^{i(\frac{2k\pi}{5} + 2\pi)} = e^{i\frac{2k\pi + 5\cdot 2\pi}{5}} = e^{i\frac{(k+5)2\pi}{5}}\,,$$

das heißt wir haben genau 5 voneinander verschiedene Lösungen $\sqrt[5]{2}e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in M$, nämlich

$$\sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi k}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi(k+1)}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi(k+2)}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi(k+3)}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi(k+4)}{5}}\,,$$

für ein beliebiges aber festes $k \in \mathbb{Z}$. Exemplarisch für $k = 0$ ergibt das

$$\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{2\pi}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{4\pi}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{6\pi}{5}}, \sqrt[5]{2}e^{i\frac{8\pi}{5}}\,.$$

4 Folgen

Definition 4.1. (Folge)
Wir nennen eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (oder $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$) eine Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $a_n := a(n)$ und schreiben für die Abbildung a einfach $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 4.2. (Folgenkonvergenz)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

In Worten: Zu jeder (noch so kleinen Zahl) $\varepsilon > 0$ können wir ein (noch so großes) $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass ab diesem n_0 alle Folgenglieder a_n höchstens ε von a entfernt liegen. Bzw. etwas informeller: Die Folgenglieder $a_1, a_2, \ldots$ kommen a irgendwann ($\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$) beliebig nahe ($\forall \varepsilon > 0$) und bleiben dort auch ($\forall\, n \geq n_0$). Bild! In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Anhand von folgendem Beispiel sehen wir, wie wir eine Aufgabe zur Folgenkonvergenz formal sauber aufschreiben können.

Beispiel 4.3.
Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $a_n := \frac{c}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wenn ja wogegen?

Behauptung 4.4.
Es gilt $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_0 > \frac{|c|}{\varepsilon}$. Dann gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| = |\frac{c}{n}| = \frac{|c|}{n} \leq \frac{|c|}{n_0} < \frac{|c|}{\frac{|c|}{\varepsilon}} = \varepsilon\,.$$

□

Bemerkung 4.5.
Sei $c := 1000000$. Wollen wir so ein n_0 also beispielsweise für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ finden, so ergibt sich aus dem Beweis die Bedingung $n_0 > \frac{|c|}{\varepsilon} = \frac{1000000}{\frac{1}{1000}} = 1000000000$. Also kann man zb. $n_0 := 1000000001$ setzen, aber jedes größere n_0 wäre auch sinnvoll, man kann also auch $n_0 := 1000000002, 1000000003, \ldots$ wählen.

Beispiel 4.6. (Cesaro-Summe)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$, so gilt auch

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \xrightarrow[n\to\infty]{} a\,.$$

(b) Im Allgemeinen folgt aus der Konvergenz von $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 4.7.
Man kann die Aufgabenstellung in Beispiel 4.6 auch wie folgt formulieren: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt

(a) $\left(\exists\, a \in \mathbb{R} : a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow[n\to\infty]{} a\right)$.

(b) Seien A und B Aussagen: Dann gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$. Das heißt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg((\neg A) \vee B) = A \wedge (\neg B)$. Wir wollen zeigen, dass $A \coloneqq \exists\, a \in \mathbb{R} : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ nicht impliziert, dass $B \coloneqq a_n$ konvergiert. Das heißt wir können zeigen: $\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \wedge \neg B$. Also $\exists\, a \in \mathbb{R} : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $\varepsilon' \coloneqq \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Dann sagt uns die Definition für $a_n \to a$ mit $n \to \infty$, dass

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon' = \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Setze nun $c \coloneqq \sum_{i=1}^{n_0} a_i \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit Beispiel 4.3 und der darauffolgenden Behauptung (wegen $c > 0$), dass

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}\, \forall\, n > n_2 : \frac{c}{n} = |\frac{c}{n}| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2}$$

Sei nun $n_2 > \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt $n_2 > n_0$ und $n_2 > n_1$ und somit für alle $n > n_2$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - a\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - n\frac{1}{n}a\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a)\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\right| \cdot \left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a)\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i - a| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0}|a_i - a|}_{=c} + \frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}|a_i - a| \\
&= \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}|a_i - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}|a_i - a| && (2) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} && (1) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

(b) Es genügt, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden, so dass $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\infty} a_n\right)$ konvergiert, aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Welche Folgen kennen wir, die divergieren?

(a) Folgen, die gegen unendlich divergieren: Naiv: $a_n = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} a_i &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} && \text{(Kleiner Gauß)} \\
&= \frac{n+1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\,.
\end{aligned}
$$

Klappt nicht...

(b) Folgen die mehrere Häufungspunkte haben. Naiv: $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{-1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Super! Diese Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leistet also das Gewünschte.

□

Beispiel 4.8. (Quotienten von Polynomen in n)
Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \frac{10n^5 + 2n^4 - 1000n + 10}{100n^5 + 3n^3 - 10n^2 + 1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$? Ja, der Grenzwert ist $a := \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Idee: Erweitere a_n mit der größten Potenz von n die in a_n vorkommt, d.h.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{10n^5 + 2n^4 - 1000n + 10}{100n^5 + 3n^3 - 10n^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^5}} \frac{10n^5 + 2n^4 - 1000n + 10}{100n^5 + 3n^3 - 10n^2 + 1} \\ &= \frac{10 + \frac{2}{n} - \frac{1000}{n^4} + \frac{10}{n^5}}{100 + \frac{3}{n^2} - \frac{10}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{10+0+0+0}{100+0+0+0} = \frac{1}{10}\,. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 4.9.
Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \begin{cases} 1 & \exists\, k \in \mathbb{N} : n = 2^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und falls ja, wogegen?

4.1 Einschub: Äquivalenzrelationen und Wohldefiniertheit

Definition 4.1.1.
Sei M eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine Teilmenge $\sim \subseteq M \times M$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) (Reflexivität) $\forall\, a \in M : (a,a) \in \sim$.

(ii) (Symmetrie) $\forall\, a, b \in M : ((a,b) \in \sim) \Rightarrow ((b,a) \in \sim)$

(iii) (Transitivität) $\forall a, b, c \in M : ((a,b) \in \sim) \wedge ((b,c) \in \sim)) \Rightarrow ((a,c) \in \sim)$.

Statt $(a,b) \in \sim$ wird oft einfach $a \sim b$ geschrieben. Dies führt zu folgender alternativen, aber äquivalenten Formulierung:

(i) (Reflexivität) $\forall\, a \in M : a \sim a$.

(ii) (Symmetrie) $\forall\, a,b \in M : a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(iii) (Transitivität) $\forall a,b,c \in M : (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$.

Wir schreiben für ein Element $x \in M$

$$\overline{x} \coloneqq \{y \in M \,|\, y \sim x\}\,.$$

$\overline{x}$ heißt die Äquivalenzklasse von x. Falls $x \sim y$, so gilt $\overline{x} = \overline{y}$ (Übung).

Bemerkung 4.1.2.
Eine Äquivalenzrelation kann man sich als eine etwas schwächere Version von Gleichheit vorstellen. Wir versuchen in einer Äquivalenzrelation Objekte ($x \in M$) bezüglich einer gewissen Eigenschaft zu kategorisieren (in die Äquivalenzklassen $\overline{x}$).
Beispiel: Sei M die Menge aller Autos. Für zwei Autos $A, B \in M$ schreiben wir $A \sim B$ (bzw. $(A,B) \in\sim$), falls sie vom selben Hersteller sind. Dann gilt etwa E-Klasse $\sim$ V-Klasse (beide vom Autohersteller Mercedes), aber E-Klasse $\neq$ V-Klasse. Die Äquivalenzklassen sind dann genau alle Autos vom selben Hersteller.

Beispiel 4.1.3.
Sei $M \coloneqq \mathbb{Z}$. Wir definieren für $a,b \in \mathbb{Z}$

$$a \sim b :\Leftrightarrow a - b \text{ ist durch 2 teilbar}\,.$$

Wir zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(i) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ ist $a \sim a$, denn $a - a = 0$ ist durch 2 teilbar.

(ii) Seien $a,b \in \mathbb{Z}$ beliebig und gelte $a \sim b$, d.h.$\exists\, k \in \mathbb{Z} : a - b = 2k$. Dann ist $b - a = -(a-b) = -2k = 2(-k)$, also ist auch $b - a$ durch 2 teilbar. Daraus folgt $b \sim a$.

(iii) Seien $a,b,c \in \mathbb{Z}$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$, d.h. es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = 2k_1$ und $b - c = 2k_2$, Dann gilt

$$a - c = (a-b) + (b-c) = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)\,,$$

das heißt $a - c$ ist durch 2 teilbar, und somit $a \sim c$.

Die Äquivalenzklassen sind genau $\overline{0}$, die Menge aller geraden ganzen Zahlen, und $\overline{1}$, die Menge aller ungeraden ganzen Zahlen

Definition 4.1.4. (Wohldefiniertheit)
Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. f ist wohldefiniert, wenn f tatsächlich der Definition einer Abbildung entspricht, d.h.

(a) Für jedes $x \in M$ gilt $f(x) \in N$.

(b) Für alle $x, y \in M$ gilt $(x = y) \Rightarrow (f(x) = f(y))$.

Teil (b) kann problematisch werden, falls die Elemente von M Äquivalenzklassen sind, da in diesem Fall oft die Abbildung f durch einen Vertreter der Äquivalenzklasse definiert wird. Mehr dazu später.

Beispiel 4.1.5. (Gegenbeispiele für Wohldefiniertheit)

(a) $f : \{0, 1\} \to \mathbb{Q}$: $f(0) := 0$, $f(1) := \pi$. $\pi \notin \mathbb{Q}$. Der Wert $f(1) = \pi$ sollte per Definition von f in $\mathbb{Q}$ sein, er ist aber in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ mit $f(a/b) := a$ für alle $(a/b) \in \mathbb{Q}$. Es gilt $f(1/2) = 1$ aber $f(2/4) = 2$ und $2/4 = 1/2$, also hat $1/2$ zwei verschiedene Bilder unter f.

Beispiel 4.1.6.
In der Vorlesung haben wir die Addition von reellen Zahlen $\overline{(s_n)}, \overline{(v_n)}$ kennengelernt:

$$\overline{(s_n)} + \overline{(v_n)} := \overline{(s_n + v_n)}\,.$$

Dies kann man als Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auffassen.

$$\overline{(s_n)} + \overline{(v_n)} := f((\overline{(s_n)}, \overline{(v_n)})) := \overline{(s_n + v_n)}\,.$$

In der Abbildungsvorschrift tauchen die Vertreter $(s_n), (v_n)$ der Äquivalenzklassen $\overline{(s_n)}, \overline{(v_n)}$ auf, die Abbildung könnte also für die Äquivalenzklasse $\overline{(s_n)}$ verschiedene Bilder haben, je nachdem welchen Vertreter der Äquivalenzklasse wir wählen. Um Wohldefiniertheit zu zeigen, müssen wir also zeigen:

(a) $\overline{(s_n + v_n)} \in \mathbb{R}$, d.h. $s_n + v_n$ ist rationale Cauchy-Folge (d.h. der Wert $\overline{(s_n)} + \overline{(v_n)}$ ist tatsächlich in $\mathbb{R}$, was wir auch haben wollen).

(b) Sind $(s'_n), (v'_n)$ rationale Cauchy-Folgen mit $(s_n) \sim (s'_n)$ und $(v_n) \sim (v'_n)$, so folgt $\overline{(s_n + v_n)} = \overline{(s'_n + v'_n)}$ (d.h. die Addition von $\overline{(s_n)}$ und $\overline{(v_n)}$ ergibt einen eindeutigen Wert.

Zu (b) sagt man auch, dass diese Definition unabhängig von den Vertretern $(s_n), (v_n)$ der Äquivalenzklassen $\overline{(s_n)}, \overline{(v_n)}$ ist.

Beispiel 4.1.7. (Wohldefiniertheit des Produkts reeller Zahlen)
Dieses Beispiel wird in den Übungen auftauchen. Wir sollen zeigen, dass das Produkt reeller Zahlen wohldefiniert ist, das heißt, dass

$$\overline{(s_n)} \cdot \overline{(v_n)} := \overline{(s_n \cdot v_n)}$$

wohldefiniert ist, wobei $(s_n), (v_n)$ wieder beliebige rationale Cauchy-Folgen sind. Hierfür müssen wir zeigen:

(a) $(s_n \cdot v_n)$ ist eine rationale Cauchy-Folge. Damit ist $\overline{(s_n \cdot v_n)} \in \mathbb{R}$.

(b) Sind $(s'_n), (v'_n)$ rationale Cauchy-Folgen mit $(s_n) \sim (s'_n)$ und $(v_n) \sim (v'_n)$, so folgt $(s_n \cdot v_n) \sim (s'_n \cdot v'_n)$ (und damit $\overline{(s_n \cdot v_n)} = \overline{(s'_n \cdot v'_n)}$).

4.2 Monotoniekriterium

In der Vorlesung haben wir ein wichtiges Kriterium kennengelernt, mit dem wir prüfen können, ob eine Folge konvergiert, ohne den Grenzwert kennen zu müssen.

Satz 4.2.1. ***(Monotoniekriterium)***
Jede monoton wachsende und beschränkte reelle Folge konvergiert in $\mathbb{R}$. Oder anders formuliert: Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend, so gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$.

Beispiel 4.2.2. (Anwendung des Monotoniekriteriums, Heron-Verfahren)
Seien $a, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $c > 0$ beliebig. Definiere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_0 := c$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Wir wollen prüfen, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Zunächst überlegen wir uns, wie der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussieht. Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $b \in \mathbb{R}$. Dann muss gelten

$$b = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right)\,.$$

Stellen wir dies nach b um, so ergibt sich

$$b^2 = a\,,$$

also $b \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$. Nach Definition von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist aber klar, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (streng genommen beweist man das mit Induktion, Übung). Daher würde $b = \sqrt{a}$ folgen. Wir haben jetzt also geklärt, dass falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überhaupt konvergiert, dann muss $b = \sqrt{a}$ der Grenzwert sein. Wenn man konkrete Werte für c, a wählt und die ersten Folgenglieder ausrechnet, kann man einen Hinweis darauf bekommen, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend oder wachsend sein könnte. Setze $a = 4$ und $c = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{1}\right) = \frac{5}{2}\\
a_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + \frac{4}{\frac{5}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{10} + \frac{16}{10}\right) = \frac{41}{20} < \frac{50}{20} = \frac{5}{2} = a_1\\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{41}{20} + \frac{4}{\frac{41}{20}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{41}{20} + \frac{80}{41}\right) = \frac{1681 + 1600}{1640} = 2.0006097561 < 2.05 = \frac{41}{20} = a_2\,.
\end{aligned}$$

Dies legt nahe, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt sein könnte. Versuchen wir also zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, d.h.

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Das ist äquivalent zu

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{a}{a_n}\right) - a_n \\ &= \frac{a}{2a_n} - \frac{a_n}{2} \\ &= \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0\,. \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt müssen wir noch $a - a_n^2 \leq 0$ zeigen, was erfüllt sein sollte, da wir weiter oben vermutet haben, dass $a_n \geq \sqrt{a}$. Das bedeutet $a_n^2 \geq a$ und somit $a_n^2 - a \geq 0$ und $a - a_n^2 \leq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_n^2 - a &= \left(\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right)\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4}a_{n-1}^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\frac{a^2}{a_{n-1}^2} - a \\ &= \frac{1}{4}a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\frac{a^2}{a_{n-1}^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{a}{a_{n-1}}\right)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Also folgt $a_n^2 \geq a$ (und somit wegen $a_n \geq 0$ auch $a_n \geq \sqrt{a}$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt (nach unten durch 0 bzw. schärfer durch $\sqrt{a}$ und nach oben durch a_1, da monoton fallend). Damit konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$. Weiter oben haben wir schon geklärt, dass dann $b = \sqrt{a}$ gelten muss.

Hausaufgabe 4.2.3.
Schreibt obigen informellen Beweis von Beispiel 4.2.2 mathematisch präzise auf. Nächste Woche steht der saubere Beweis auch im Skript.

4.3 Häufungspunkte

Definition 4.3.1.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung. $(a_{\sigma_n})_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 4.3.2. (Beispiele und Gegenbeispiele für Teilfolgen)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Sei $\sigma(n) := 2n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots)\,.$$

Das ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Sei $\sigma(n) \coloneqq 2n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots)\,.$$

Das ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Sei $\sigma(n) \coloneqq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots)\,.$$

Das ist keine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Satz 4.3.3.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann konvergieren auch alle Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Beweis. Sei $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge, d.h. $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine Abbildung mit $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots$ (d.h. insbesondere $\sigma(n) \to \infty$ mit $n \to \infty$). Wir müssen zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_1 : |a_{\sigma(n)} - a| < \varepsilon\,.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Wähle nun $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $\sigma(n_1) \geq n_0$. Dann gilt für alle $n \geq n_1$ insbesondere, dass $\sigma(n) \geq n_0$ (da $\sigma(n) > \sigma(n-1) > \ldots > \sigma(n_1) \geq n_0$ und somit

$$|a_{\sigma(n)} - a| < \varepsilon\,.$$

□

Definition 4.3.4.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt <u>Häufungspunkt</u> der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Wir betrachten nochmals

Hausaufgabe 4.10.
Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n \coloneqq \begin{cases} 1 & \exists\, k \in \mathbb{N} : n = 2^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und falls ja, wogegen?

Lösung: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht. Zwei Möglichkeiten:

1. Wähle die Teilfolgen $(a_{\sigma_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{\sigma_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ wobei

$$\begin{aligned}\sigma_1(n) &\coloneqq 2^n\\ \sigma_2(n) &\coloneqq 2^n+1\,.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}a_{\sigma_1(n)} = a_{2^n} &= 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\\ a_{\sigma_2(n)} = a_{2^n+1} &= 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.\end{aligned}$$

Wir haben also zwei Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, die jeweils gegen 0, bzw. 1 konvergieren. Damit hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte und kann nach Satz 4.3.3 nicht konvergieren. Hier haben wir implizit verwendet, dass eine Folge genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

2. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen a konvergiert. Wir unterscheiden zwei Fälle

   (1) $a = 0$: Wir müssen zeigen:

   $$\exists \varepsilon > 0\,\forall\, n_0 \in \mathbb{N}\,\exists\, n \geq n_0 : |a_n - 0| \geq \varepsilon\,.$$

   Wähle $\varepsilon \coloneqq 1$ und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $2^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, gibt es ein $n \geq n_0$ mit $n = 2^k$. Damit gilt

   $$|a_n - 0| = |a_n| = |a_{2^k}| = 1 \geq 1 = \varepsilon\,.$$

   (2) $a \neq 0$: Wir müssen zeigen:

   $$\exists\, \varepsilon > 0 \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\,\exists\, n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon\,.$$

   Wähle $\varepsilon \coloneqq |a| > 0$ (da $a \neq 0$). Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig und wähle $n \geq n_0$ so, dass $n \neq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist möglich, denn falls $n_0 = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ so ist $n \coloneqq n_0 + 1 \neq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und falls $n_0 \neq 2^k$, so wähle $n \coloneqq n_0$. Damit gilt also

   $$|a_n - a| = |0 - a| = |a| \geq |a| = \varepsilon\,.$$

Satz 4.3.5. ***(Satz von Bolzano-Weierstraß)***
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt.

Beispiel 4.3.6.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n \coloneqq (-1)^n(2 - \frac{1}{n})\,.$$

Wir wollen alle Häufungspunkte, $\limsup, \liminf, \sup$ und $\inf$ dieser Folge bestimmen. Dazu bemerken wir zunächst, dass

$$a_{2n} = (-1)^{2n}(2 - \frac{1}{2n}) = 2 - \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$
$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(2 - \frac{1}{2n+1}) = -2 + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -2\,.$$

Also haben wir schon mal die zwei Häufungspunkte -2 und 2 gefunden. Wir vermuten, dass das alle Häufungspunkte sind. Formal zeigt man das wie folgt. Wir unterscheiden für eine beliebige Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die folgenden Fälle:

(1) : $\exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_0 : \sigma(n)$ gerade $) \vee (\forall n \geq n_0 : \sigma(n)$ ungerade $)$. In Worten: Es gibt einen Index n_0, so dass ab diesem Index entweder alle $\sigma(n)$ gerade Zahlen sind, oder alle $\sigma(n)$ ungerade Zahlen sind.
Gelte ohne Einschränkung $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \sigma(n)$ gerade. Dann gilt $a_{\sigma(n)} \overset{2}{\to}$ (Im anderen Fall ergibt sich $a_{\sigma(n)} \overset{-}{\to} 2$). Wir erhalten für solche Teilfolgen also keine weiteren Häufungspunkte.

(2) : $\forall n_0 \in \mathbb{N} : (\exists n \geq n_0 : \sigma(n)$ gerade$) \wedge (\exists n \geq n_0 : \sigma(n)$ ungerade$)$. In Worten: Es gibt in dieser Teilfolge unendlich viele $\sigma(n)$, die ungerade Zahlen sind, und unendlich viele $\sigma(n)$, die gerade Zahlen sind. In diesem Fall konvergiert die Folge nicht, da sie zwei Häufungspunkte hat. Also erhalten wir in diesem Fall auch keine weiteren Häufungspunkte

Die Fälle (1) und (2) sind die einzigen beiden Fälle, die passieren können (Fall (2) ist die Negation von Fall (1)). Also gibt es keine weiteren Häufungspunkte neben -2 und 2. Hier haben wir also $\liminf_{n\to\infty} a_n = -2$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$. Weiter gilt sogar $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = 2$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -2$.

Beispiel 4.3.7. (Aufgabe 32 auf Blatt 6)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$ ihr einziger Häufungspunkt. Dann gilt $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Beweis. Idee: Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen also an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen a konvergiert. Dazu müssen wir die Definition von $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ negieren. Die Definition ist

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Die Negation lautet

$$\exists\, \varepsilon > 0 \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\, \exists\, n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon\,.$$

In Worten: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ sodass wir für jeden Index $n_0 \in \mathbb{N}$ einen größeren Index $n = n(n_0) \in \mathbb{N}$ finden können, so dass $|a_n - a| \geq \varepsilon$. Konstruiere daraus eine Teilfolge $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, für die $|a_{\sigma(n)} - a| \geq \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Hierbei ist Vorsicht geboten, da man sicherstellen muss, dass $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots$ $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist als Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, verwende also den Satz von Bolzano-Weierstraß auf diese Teilfolge und verwende die Voraussetzung, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt hat. □