Hinweis: In der echten Klausur im Februar gilt voraussichtlich:

(1) 4 der 5 Aufgaben werden gewertet. Falls alle Aufgaben bearbeitet werden, wird Aufgabe 5 nicht gewertet.

(2) Jede Aufgabe gibt 4 Punkte, also kann man insgesamt 16 Punkte erreichen.

(3) Üblicherweise besteht man die Klausur mit etwa 8 Punkten.

Aufgabe 1.
Prüfen sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n \coloneqq \left(\frac{n+3}{n}\right)^{3n+4} \log\left(\frac{2n+6}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

konvergiert, bestimmen sie ggf. den Grenzwert und beweisen sie ihr Resultat.

Aufgabe 2.
Prüfen sie die folgende Reihe auf Konvergenz in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen sie ihr Resultat.

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^\alpha (n+1)^\alpha}}$$

Aufgabe 3.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-Stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Zeigen sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch $a_0 \coloneqq 0$, $a_1 \coloneqq 1$ und

$$a_{n+2} \coloneqq a_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Diese Folge heißt **Fibonacci-Folge**. Zeigen sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) .$$

Aufgabe 5.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen die mit $n \to \infty$ gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$ derart, dass f_n gleichmäßig mit $n \to \infty$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen sie, dass die Folge $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $n \to \infty$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Keine Abgabe. Aufgaben zur freiwilligen Bearbeitung.