Übungsblatt 13

Aufgabe 73

Seien die Funktionen $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)\,.$$

Beweis. Da f stetig ist, besitzt f eine Stammfunktion F. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = F(b(x)) - F(b(a))$$

F ist differenzierbar mit $F' = f$ und a und b sind nach Voraussetzung differenzierbar. Somit folgt die Behauptung mit der Kettenregel. □

Aufgabe 74

Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion für die Funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$, $h(x) = \frac{x}{x^2-6x+13}$, $u(x) = \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}$, und $v(x) = \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}$.

Beweis. Fast alle folgenden Substitutionen wurden in der Vorlesung für Integrale der entsprechenden Typen vorgeschlagen. Erinnerung: die Hyperbelfunktionen sinh und cosh sind gegeben durch

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

und erfüllen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x\,, \cosh x - \sinh x = 1. \tag{1}$$

- $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. Wir schreiben

  $$f(x) = \underbrace{x^{-2}}_{u'} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{v}$$

  und verwenden partielle Integration. Die Stammfunktion von $u'(x) = x^{-2}$ ist $u(x) = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$ und die Ableitung von $v(x) = (1-x^2)^{1/2}$ ist

  $$v'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Partielle Integration liefert (Vorzeichen beachten)

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} = -\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2}$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin(x)\,. \tag{3}$$

- Alternative Lösung: Für Integrale mit $\sqrt{1-x^2}$ substituieren wir $x = \cos t$, d. h. $dx = -\sin t dt$. Wegen $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx &= -\int \frac{\sqrt{1-\cos^2(t)}}{\cos^2(t)}\sin(t)\,dt = -\int \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}\,dt \\ &= -\int \tan^2(t)\,dt\end{aligned}$$

Um eine Stammfunktion von $\tan^2(t)$ zu finden, verwenden wir, dass $\frac{d}{dt}\tan t = 1 + \tan^2 t$, d. h. $\int \tan^2 t = \tan t - t$. Rücksubstitution unter Verwendung von $\sin(y) = \sqrt{1-\cos(y)}$ mit $y = \arccos x$ liefert

$$-\int \tan^2(t)\,dt = t - \tan(t) = \arccos x - \tan(\arccos(x)) \tag{4}$$
$$= \arccos x - \frac{\sin(\arccos(x))}{x} = \arccos x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \tag{5}$$

Dass sowohl (3) als auch (5) korrekte Stammfunktionen sind, liegt daran, dass $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$, d.h. beide Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante.

- $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$: Wir substituieren $x = \sinh t$, d. h. $dx = \cosh(t)\,dt$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\sinh^2(t)}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}}\cosh(t)\,dt \qquad = \int \frac{\sinh^2(t)}{\cosh(t)}\cosh(t)\,dt \\ &= \int \sinh^2(t)\,dt\end{aligned}$$

Dieses Integral berechnen wir so, wie wir es bereits bei $\int \sin^2(x)dx$ getan haben, mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int \sinh(t)\sinh(t)\,dt &= \cosh(t)\sinh(t) - \int \cosh^2(t)\,dt \\ &= \cosh(t)\sinh(t) - \int 1 + \sinh^2(t)\,dt \\ &= \cosh(t)\sinh(t) - t + \int \sinh^2(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Auflösen ergibt

$$\int \sinh^2(t) = \frac{1}{2}\left(\sinh(t)\cosh(t) - t\right)$$

Nun können wir resubstituieren und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2}\left(x\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) - \operatorname{arsinh}(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arsinh}(x)\right)\end{aligned}$$

- $h(x) = \frac{x}{x^2-6x+13}$: Die Idee ist, den Zähler so umzuschreiben, also eine schlaue Null und schlaue Eins einzufügen, so dass im Zähler die Ableitung des Nenners steht, und auf dem zweiten Bruch kein x mehr im Zähler auftaucht.

$$\frac{x}{x^2-6x+13} = \frac{\frac{1}{2}(2x-6)+3}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2}\frac{2x-6}{x^2-6x+13} + 3\frac{1}{x^2-6x+13}\,.$$

Dann erhält man nämlich die Stammfunktion des ersten Bruchs mithilfe des Logarithmus, und Brüche wie der zweite (1 / Polynom zweiten Grades) lassen sich mithilfe von quadratischer Ergänzung auf den arctan zurückführen. Für den ersten Summanden können wir die Stammfunktion $\ln(x^2-6x+13)$ direkt ablesen:

$$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx = \ln(x^2-6x+13)\,.$$

Für den zweiten Bruch:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-6x+9+4}dx &= \int \frac{1}{(x-3)^2+4} \quad \text{Sub } z = x-3 \\ &\int \frac{1}{z^2-4}dz = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(z/2)^2+1} \quad \text{Sub } u = \frac{z}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\arctan(u) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

Dies setzen wir oben ein und erhalten die Stammfunktion

$$\int \frac{x}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)\,.$$

- $u(x) = \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}$: Dieses Integral ist von der Form $\int R(\sin x, \cos x, \tan x)$ (wobei hier $R(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{1+x_2}$). Wir substituieren $u = \tan x/2$. Dann ist $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ und $dx = \frac{2}{1+u^2}du$. Dies setzen wir ein und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx &= \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{1+u^2}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}du \\ &= \int \frac{1-u^2}{1+u^2}du\,.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = -\frac{u^2-1}{u^2+1} = -\frac{u^2+1-2}{u^2+1} = \frac{2}{u^2+1} - 1$$

Dies sieht man alternativ auch durch Polynomdivision mit Rest. Somit ist

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{2}{u^2+1} - 1\,du &= 2\arctan(u) - u \\ &= x - \tan(x/2)\,.\end{aligned}$$

- $v(x) = \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}$: Hier brauchen wir einen kleinen Trick:

  $$\frac{x^2+x}{(x^2+1)^2} = (x+1)\frac{x}{(x^2+1)}$$

  und wegen

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^2+1} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

  lässt sich der zweite Faktor leicht integrieren. Mit partieller Integration erhalten wir dann

  $$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \underbrace{(x+1)}_{v}\underbrace{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}_{u'}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right) \quad = -\frac{x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x\,.\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 75

Berechnen Sie $\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,dx$ durch partielle Integration. Verwenden Sie dann die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion in $x^x = e^{x\ln x}$, um zu zeigen (Bernoulli 1697):

$$\int_0^1 x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \dots\,.$$

Beweis. Die Funktion $f(x) = x^n\ln(x)^n$ ist nicht in $x=0$ definiert, kann aber dort durch 0 stetig fortgesetzt werden (dasselbe gilt für $x^{n+1}\ln(x)^n$). Wir werden daher bei der Integration stillschweigend $x = 0$ einsetzen.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n \ln(x)^n &= \underbrace{\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln(x)^n\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot n \cdot \ln(x)^{n-1} \frac{1}{x} \, dx \\
&= -\frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n \ln(x)^{n-1} \, dx \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \int_0^1 x^n \ln(x)^{n-2} \, dx \\
&= -\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)^3} \int_0^1 x^n \ln(x)^{n-3} \, dx \\
&= \dots \\
&= (-1)^{n-1} \frac{n!}{(n+1)^{n-1}} \int_0^1 x^n \ln(x) \, dx \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} \int_0^1 x^n \, dx \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \ln(x)^k}{k!} \, .$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x \, dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \ln(x)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k \ln(x)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \dots
\end{aligned}$$

Es bleibt zu rechtfertigen, warum man Integral und Reihe vertauschen darf. Die auf $[0,1]$ stetig fortgesetzte Funktion $x \ln x$ ist aber nach dem Satz von Maximum und Minimum beschränkt durch ein $M \in \mathbb{R}$, somit ist $\frac{|x^k \ln(x)^k|}{k!} \leq \frac{M^k}{k!}$. Die Reihe $\sum \frac{M^k}{k!}$ konvergiert, somit konvergiert obige Reihe gleichmäßig nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium und es dürfen Reihe und Integral vertauscht werden. □

Aufgabe 76

Sei $f_n^{\{k\}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ für $k = 0, 1, 2$ gegeben durch

$$f_n^{\{k\}}(x) = \frac{n^k x}{(1 + n^2 x^2)^2} \, .$$

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} f_n^{\{k\}}(x)$ für $x \in [0,1]$ und den Maximalwert von $f_n^{\{k\}}$. Untersuchen Sie, ob die Konvergenz gleichmäßig ist. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{\{k\}}(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{\{k\}}(x) \, dx \ \ ?$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass für $k \in \{0,1,2\}$ und für jedes $x \in [0,1]$

$$\frac{n^k x}{(1+n^2x^2)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

da der Nenner Grad 4 in n hat. Somit konvergiert $f_n^{\{k\}}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Nun berechnen wir ein lokales Maximum von $f_n^{\{k\}}$. Die Ableitung ist

$$f_n'(x) = \frac{n^k(1+n^2x^2)(1-3n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^4}$$

und verschwindet nur dann, wenn $1-3n^2x^2=0$, also wenn $x=\frac{\sqrt{3}}{3n} =: x_n$. Dort hat die Funktion den Wert $f_n^{\{k\}}(x_n) = \frac{3\sqrt{3}}{16}n^{k-1}$. Um zu sehen, dass x_n nicht nur ein lokales sondern sogar ein globales Maximum ist, kann man zwei Dinge tun:

- Entweder man zeigt, dass $f''(x_n) < 0$ ist. Die zweite Ableitung ist

  $$f_n''(x) = n^k\frac{12n^2x(n^2x^2-1)}{(1+n^2x^2)^4}$$

  und damit $f_n''(x_n) = -\frac{32}{9}n^{k+1} < 0$ (ohne Gewähr!). Daraus folgt zunächst, dass x_n ein lokales Maximum ist. Da aber f' keine weiteren Nullstellen auf $[0,1]$ hat und $f''(x_n)<0$, ist $f'>0$ für $x<x_n$ und $f'<0$ für $x>x_n$, d.h. f selbst ist für $0\le x\le x_n$ monoton steigend und für $x_n \le x \le 1$ monoton fallend. Somit ist x_n ein globales Maximum.

- Man kann auch alternativ ohne die zweite Ableitung auskommen. Wenn man die Randwerte $x=0$ und $x=1$ einsetzt, kann man leicht sehen, dass $f_n(0) = 0 \le f_n(x_n)$ und $f_n(1) = n^k/(1+n^2)^2 \le f_n(x_n)$. Daraus folgt, dass in x_n kein Sattelpunkt[1] vorliegen kann, d. h. in x_n liegt ein Extremum vor. Da aber $f(x_n) > f(0)$ ist, kann es kein Minimum sein. Somit ist x_n ein lokales Maximum. Da aber f' keine weiteren Nullstellen hat und $f_n(x_n) > f_n(0)$ sowie $f_n(x_n) > f_n(1)$, ist das Maximum sogar global.

Im nächsten Schritt untersuchen wir die Funktionenfolge auf gleichmäßige Konvergenz: Wir unterscheiden drei Fälle:

- $k=0$. Dann ist $0 \le f_n(x) \le f_n(x_n) = \frac{3\sqrt{3}}{16n}$, d. h. $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-0| = \frac{3\sqrt{3}}{16n} \to 0$. Somit konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

- $k=1$. Dann ist $f_n(x_n) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ unabhängig von n, d. h. $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-0| = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ konvergiert nicht gegen 0. Damit liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

- $k=2$. Dann ist sogar $f_n(x_n) = \frac{3\sqrt{3}n}{16} \to \infty$, obwohl f_n punktweise gegen 0 konvergiert. Somit ist auch hier die Konvergenz nicht gleichmäßig.

[1] Ein Sattelpunkt ist eine Stelle x_0, an der $f'(x_0)=0$ ist, aber f' keinen Vorzeichenwechsel hat, d.h. f ist sowohl für $x \le x_0$ monoton steigend als auch für $x \le x_0$ (oder monoton fallend).

Abschließend bleibt die Frage zu klären, wann man Integral und Grenzwert vertauschen darf. Für $k = 0$ folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz direkt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{\{0\}}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{\{0\}}(x)\,dx = 0$$

Für $k = 1$ und $k = 2$ berechnet man eine Stammfunktion mit dem Ansatz

$$\frac{d}{dx}(1+n^2x^2)^{-1} = -2xn^2(1+n^2x^2)^{-2}$$

Somit ist die Stammfunktion von $f_n^{(k)}$ gegeben durch

$$F_n^{(k)}(x) = -\frac{n^k}{2n^2(1+n^2x^2)}\,.$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^1 f_n^{(k)}(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{n^k}{n^2+1}$$

Für $k = 1$ ist also

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{\{1\}}(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n}{n^2+1} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{\{1\}}(x)\,dx$$

Für $k = 2$ hingegen ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{\{2\}}(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{\{2\}}(x)\,dx\,.$$

(Wir haben hier also ein Beispiel mit punktweiser und nicht gleichmäßiger Konvergenz, wo das vertauschen einmal denselben Wert liefert und einmal nicht.)

□

Aufgabe 77

Finden Sie den größten Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}\sin(nx)$ und zeigen Sie, dass f differenzierbar mit stetiger Ableitung ist.

Beweis. Es ist $|\,\mathrm{e}^{-n}\sin(nx)| \leq \mathrm{e}^{-n}$ und die geometrische Reihe $\sum e^{-n}$ konvergiert. Somit konvergiert die Reihe gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ (und damit auch punktweise). Wir betrachten nun die Funktionenfolge der Ableitungen:

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}\,k\cos(kx)$$

Es gilt wieder $|k\mathrm{e}^{-k}\cos kx| \leq k\mathrm{e}^{-k}$ und die Reihe $\sum k\mathrm{e}^{-k}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium (da $\sqrt[k]{k\mathrm{e}^{-k}} \to 1/\mathrm{e}$). Somit konvergiert die Folge s_n' gleichmäßig gegen die Funktion

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-n}\cos(nx)$$

Nach Satz 1, (4.2) ist f differenzierbar mit stetiger Ableitung $f'(x) = g(x)$ (insbesondere dürfen Differentiation und Reihe vertauscht werden). □

Aufgabe 78

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}$$

auf dem Intervall $[0, b]$ mit $0 < b < 1$ termweise integriert werden darf. Sie erhalten so die Arcustangens–Reihe.

Beweis. Obige Gleichheit erhält man, wenn man in die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$ den Wert $q = -x^2$ einsetzt. Auf dem Intervall $[0, b]$ gilt $|(-1)^j x^{2j}| \leq b^{2j} = (b^2)^j$ und wegen $b < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum b^{2j}$. Somit konvergiert obige Reihe gleichmäßig auf $[0, b]$ und Grenzwert und Reihe können vertauscht werden. Die Arctan–Reihe erhält man dann durch Integration:

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}\, dx = \sum_{j=0}^{\infty} \int (-1)^j x^{2j}\, dx = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}\, .$$

$\square$