Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 06.02.2014

Klausur zu Analysis I WS 2013/14

ID Nummer: **1**

Name: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Übungsgruppenleiter: ....

Abschluss (D,B,L neu, L alt): ....

Klausur zu Analysis I — 06.02.2014

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
max. Punkte	4	4	4	4	4	16
err. Punkte						

Hinweise: WICHTIG !

- Die Bearbeitungszeit beträgt 105 Minuten.
- Sie dürfen ALLE Resultate aus der Vorlesung verwenden.
- Sie brauchen nur vier der fünf Aufgaben zu bearbeiten. Wenn Sie zu allen Aufgaben Lösungen abgeben, so wird Aufgabe 5 nicht gewertet.
- Schreiben Sie auf jedes Extra-Blatt Ihre ID Nummer, schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller.
- Wenn Sie Extra-Blätter benötigen, verwenden Sie für jede Aufgabe jeweils ein separates Blatt.
- Zum Bestehen dieser Klausur sind **8** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: **ID: 1** (4 Punkte)

Beantworten Sie durch Ankreuzen:

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Es gibt unbeschränkte reelle Folgen, für die jedes Folgenglied ein Häufungspunkt ist.
- ☐ Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann analytisch, wenn $f \in C^{\infty}(a, b)$.
- ☐ Konvergiert eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen f_n gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f, so ist f auch stetig differenzierbar.
- ☐ Konvergiert eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen f_n punktweise gegen eine Grenzfunktion f und konvergiert (f_n') gleichmäßig, so ist f differenzierbar.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : A \to \mathbb{R}$ gegen eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$?

- ☐ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad : \quad \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad \forall x \in A \quad : \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$
- ☐ $\forall \delta > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq N \quad \forall x \in A \quad : \quad |f_m(x) - f(x)| < \delta.$

Hinweis: Es können mehrere Antwortmöglichkeiten richtig sein. In beiden Teilaufgaben gilt: Wenn Sie alle Kreuze richtig gesetzt haben, erhalten Sie die volle Punktzahl; wenn Ihre Lösung um ein Kreuz von der richtigen Lösung abweicht, die Hälfte der Maximalpunktzahl. Bei einer größeren Abweichung wird die Teilaufgabe mit 0 Punkten gewertet.

Aufgabe 2: **ID: 1** (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Ist f auch zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$? Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Aussage.

Aufgabe 3: **ID: 1** (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion

$$f(x) = (\ln x)^2 \,.$$

Aufgabe 4: **ID: 1** (4 Punkte)

Seien $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) := \int_0^{u(x)} w(y)v(x)dy.$$

Aufgabe 5: **ID: 1** (4 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?