Prof. Dr. R. Tumulka, Dr. T. Tzaneteas
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2017/2018
7.2.2018

Zweite Übungsklausur zur Analysis 1

Informationen zur Klausur: Die zweite Teilklausur/der zweite Teiltest findet statt am Freitag, 23.2.2018 um 11:30 Uhr, im selben Hörsaal wie beim ersten Teil. Eine Anmeldung auf URM oder ALMA ist nicht erforderlich; wenn Sie beim ersten Teil dabei waren, sind Sie automatisch auch für den zweiten angemeldet. Der Test (Studienleistung) hat 8 Aufgaben, die Klausur (Prüfungsleistung) 10; in beiden Varianten haben Sie 60 Minuten Zeit. Nicht alle Aufgaben sind gleich lang oder gleich schwierig. Sie bearbeiten jeweils alle Aufgaben.

Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Klausurteilnehmern Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Die Aufgaben beziehen sich hauptsächlich auf den Stoff seit dem ersten Teil (ab 5.17 im Skript), es können aber Themen aus dem gesamten Semester (Skript und Übungsblätter) vorkommen; ausgenommen aus dem Klausurstoff sind die Nummern 4.4, 4.7, 7.30, 8.37, 8.38, und 8.40, die wir ausgelassen haben. Alle Fakten, die in der Vorlesung erwähnt wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen.

Hinweise für die Klausur:

- Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen.
- Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch?

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 2 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -2 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Das Produkt zweier wachsender Funktionen ist stets wachsend.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Das Produkt zweier positiver wachsender Funktionen ist stets wachsend.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jede beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to [a, b]$ ist Regelfunktion.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ auf ganz $[a, b]$ konvergiert, dann ist es dort eine stetige Funktion von x.

Aufgabe 2: Wie lautet das Integralkriterium? Wenn die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ die

Voraussetzungen ____ erfüllt,

dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann,

wenn ____.

Aufgabe 3: Finden Sie eine Regelfunktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, die keine Stammfunktion besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f_1(x) = x^{(x^x)}$

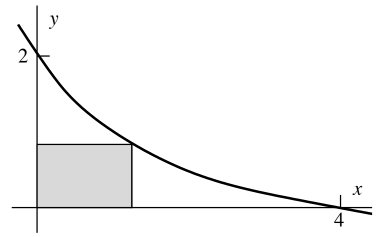
b) $f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$

c) $f_3(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}+1}\,dx$. Machen Sie Ihren Rechenweg verständlich.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des größten Rechtecks, das in die Region zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{4-x}{2+x}$ und den Koordinatenachsen passt. Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 7: Sei $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

a) Zerlegen Sie f in Partialbrüche.

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ durch Substitution.

d) Bestimmen Sie die n-te Ableitung von f für jedes $n \in \mathbb{N}$. (*Tipp*: Partialbruchzerlegung)

e) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe $T_f(x)$ von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

f) Zeigen Sie, dass die Taylor-Reihe in einer Umgebung von 0 tatsächlich gegen f konvergiert, indem Sie die Partialbrüche mit Hilfe der geometrischen Reihe ausdrücken. Wo konvergiert die geometrische Reihe?

Aufgabe 8: Bestimmen Sie $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x^2-1}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-3)^n$. Auf welchem Intervall in $\mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

Aufgabe 10: Wie lautet die Potenzreihendarstellung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für die folgenden Funktionen? Bei Teil (a)-(e) sind keine Beweise erforderlich. Geben Sie eine $\sum$-Schreibweise an und die ersten vier nicht-verschwindenden Terme, wie in

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

a) e^{-x}

b) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

c) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

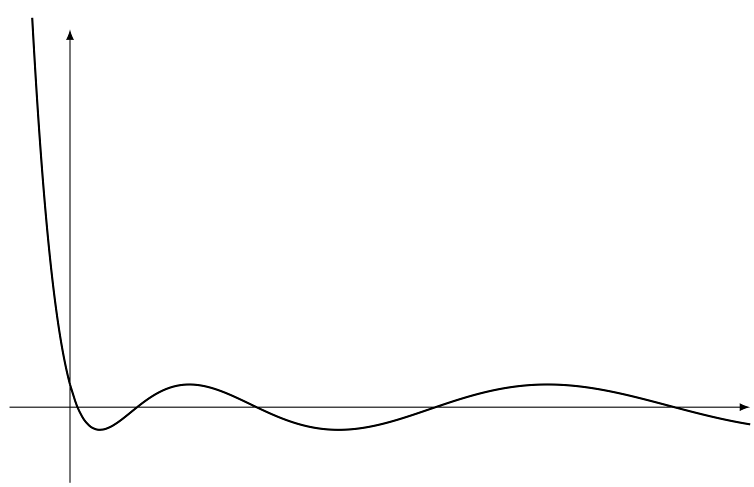
d) $\cos \sqrt{x}$ für $x \geq 0$

e) $\cosh \sqrt{-x}$ für $x < 0$

f) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ \cosh \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

(in der Figur unten dargestellt) auf ganz $\mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist. (*Tipp*: Verwenden Sie die Reihendarstellung.)



Aufgabe 11: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x| & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 12: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass

$$\forall x, y \in [a,b] : \quad \Big| f(x) - f(y) \Big| \leq L \cdot \big| x - y \big| \,.$$

Aufgabe 13: Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ definiert, wobei $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Zeigen Sie, dass für die Ableitung gilt $\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

b) Zeigen Sie, dass tanh streng wachsend ist.

c) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to \infty} \tanh(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$.

d) Zeigen Sie, dass tanh $\mathbb{R}$ bijektiv auf das Intervall $(-1, 1)$ abbildet.

e) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{artanh} = \tanh^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$.
(*Tipp*: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.)