Prof. Dr. R. Tumulka, Dr. T. Tzaneteas
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2017/2018
18.12.2017

Erste Übungsklausur zur Analysis 1

Informationen zur Klausur: Die erste Teilklausur findet statt am Samstag, 13.1.2018 um 10:15 Uhr. Wenn Sie diese Klausur als Studienleistung schreiben, dann schreiben Sie in Hörsaal N7, die Klausur hat 5 Aufgaben und dauert 45 Minuten. Wenn Sie die Klausur als Prüfungsleistung schreiben, dann schreiben Sie in Hörsaal N6, die Klausur hat 9 Aufgaben und dauert 60 Minuten. Nicht alle Aufgaben sind gleich lang oder gleich schwierig. Sie bearbeiten jeweils alle Aufgaben.

Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Klausurteilnehmern Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Der Stoff der ersten Teilklausur ist Kapitel 1-5 aus dem Skript und die Übungsblätter 1-8. Alle Fakten, die in der Vorlesung erwähnt wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen.

Hinweise für die Klausur:

- Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen.
- Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch?

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 3 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -3 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jedes reelle Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn $f, g : M \to M$ beide injektiv sind, dann ist auch $f \circ g$ injektiv.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Es gibt ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das bijektiv ist.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\cos(x - \pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jede konvergente reelle Folge besitzt genau einen Häufungspunkt.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jede reelle Folge, die genau einen Häufungspunkt besitzt, konvergiert.

Aufgabe 2: Geben Sie die Definition von Cauchyfolge an:
Eine Folge (x_n) reeller Zahlen heißt genau dann eine Cauchyfolge,

wenn ____

Aufgabe 3: Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort (knapp!).

a) Wenn $f, g : M \to M$ beide bijektiv sind, dann ist $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

b) Sei (x_n) aus $\mathbb{R}$. Wenn $\sum x_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum x_n^2$.

c) Wenn die reellen Folgen (x_n) und (y_n) beide divergieren, dann divergiert auch $(x_n + y_n)$.

Aufgabe 4: Die Folge (x_n) sei definiert durch $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ für $n \geq 1$ und $x_1 = 1$. Falls (x_n) konvergiert, welche Werte kommen für $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ in Frage? Und konvergiert (x_n)?

Aufgabe 5: Konvergieren diese Folgen? Wenn ja, wohin? (Mit Begründung.)

a) $\sqrt[n]{n^2} - \sqrt[n]{n}$

b) $\dfrac{n^8 + 8^n}{n^9 + 9^n}$

Aufgabe 6: Welche dieser Reihen konvergieren, welche divergieren (mit Beweis)?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{n^5 + n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\ln n - \ln(n+1)\big)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + n}{4^{n+1} + 5^{n+1}}$

Aufgabe 7: Leonhard verleiht 100 Euro an Karl zum unverschämten Zinssatz von 20% pro Jahr. Die beiden vereinbaren, dass am Ende jedes Jahres Karl an Leonhard die Hälfte des zu dem Zeitpunkt geschuldeten Betrages zahlt. (Z.B. zahlt Karl am Ende des ersten Jahres 60 Euro und bleibt 60 Euro schuldig.) Bestimmen Sie den Gesamtbetrag, den Karl an Leonhard zahlen wird und erläutern Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8: Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}\,.$$

Aufgabe 9: Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene.

(a) $\{e^{(-1+i)t} | 0 \leq t \leq 4\pi\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} | z^5 = 32\}$

Aufgabe 10: Zeigen Sie unter Verwendung des Zwischenwertsatzes: Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$. Dann gibt es ein $x_0 \in [0,1]$, so dass $f(x_0) = f(x_0 + 1)$.

Aufgabe 11: Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.