

14. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 79: Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit sich selbst.

Aufgabe 80: Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{2^j} x^j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 x^{j^2}.$$

Aufgabe 81: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{h^2}{6} \max_{x \in [x_0-h, x_0+h]} |f'''(x)|.$$

Hinweis: Taylor.

Aufgabe 82:

Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ so, dass $|\exp(x) - p(x)| < 10^{-2}$ für alle $x \in [-1, 1]$.