

12. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 67: Sei $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \int_a^b |g(x)|dx$$

Aufgabe 68:

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $2 \int_0^1 f(x)dx = 1$. Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in (0, 1)$ mit $f(c) = c$.

Aufgabe 69:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, stetig auf $[a, b]$ ist.

Aufgabe 70: Berechnen Sie die Stammfunktionen:

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx, \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}, \int \arccos x dx.$$

Aufgabe 71: Zeigen Sie durch wiederholte partielle Integration, dass für nichtnegative ganze Exponenten m, n

$$\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^n}{n!} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}.$$

Insbesondere ist

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

Aufgabe 72: Zeigen Sie, dass für positive ganze Zahlen n

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$