Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25.01.2021

11. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 61: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf [a,b] und differenzierbar auf (a, b), mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie:
Wenn $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Aufgabe 62: Zeigen Sie, dass $\ln(x + 1) \geq \frac{2x}{x+2}$ für alle $x \geq 0$.

Aufgabe 63: Seien $a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: Wenn $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geq n$ für alle reellen x, dann ist $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$.

Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$ auf Extrema.

Aufgabe 64: Bestimmen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x .$$

Aufgabe 65: Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls er existiert:

$$\lim_{x\to 0+} x(\ln x)^2 .$$

Aufgabe 66: Untersuchen Sie, ob die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{für } |x| \geq 1 \\ e - e^{x^2} & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = 1 - \sqrt{|x^2 - 1|} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Extremwerte besitzen.

Abgabe über URM bis zum 01.02.2021, 12:00
Besprechung in den Übungen am 03.-05.02.2021