Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 18.01.2021

10. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 55: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $|f(x)| \leq x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ist f differenzierbar in 0? Beweisen Sie ihre Vermutung.

Aufgabe 56: Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $f(x) = e^{e^x}$, $g(x) = (e^e)^x$, $h(x) = e^{\cos x}$, $u(x) = x^x$.

Aufgabe 57: Geben Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen an und untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen differenzierbar nach x sind, und berechnen Sie die Ableitungen, wenn diese existieren:

$$|x|\,, \qquad \ln|x|\,, \qquad A \cdot e^{-kx}\sin(\omega x)\,, \qquad x^{1/3}\,.$$

Aufgabe 58: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos\frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und berechnen Sie die Ableitung f'. Ist f' stetig oder differenzierbar?

Aufgabe 59: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf (a,b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf (a,b). Zeigen Sie, dass dann $f \geq g$ auf $[a,b]$.

Beweisen Sie damit die Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung auf reelle Exponenten:

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \qquad \text{für } \alpha \geq 1 \text{ und } x \geq -1\,.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie dabei die Fälle $x \geq 0$ und $-1 \leq x \leq 0$.

Aufgabe 60: Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Stellen Sie eine Vermutung für die allgemeine Form der n-ten Ableitung auf und beweisen Sie diese durch Induktion.

Abgabe über URM bis zum 25.01.2021, 12:00
Besprechung in den Übungen am 27.-29.01.2021