Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 11.01.2021

9. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 49: Geben Sie für die Funktionenfolgen $(f_n), (g_n)$ mit

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{\frac{1}{n}},$$
$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{n}x^n$$

die Grenzfunktionen an. Untersuchen Sie dann die Folgen auf gleichmäßige Konvergenz und beweisen Sie Ihr Resultat.

Aufgabe 50: Zeigen Sie: Die Sinus-Reihe konvergiert gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall, nicht aber auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 51: Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^j$$

punktweise für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, aber auf $[-1,1]$ nicht gleichmäßig konvergiert. Berechnen Sie $f(x)$. Ist die Funktion stetig?

Aufgabe 52: Zeigen Sie mithilfe eines Additionstheorems, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist. Zeigen Sie dann, dass $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$ Hölder-stetig mit $L = 1$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 53: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periode T, d.h. $f(x) = f(x+T)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 54: Sei eine Funktionenfolge (f_n) von gleichmäßig stetigen Funktionen gegeben. Zeigen Sie: Falls (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so ist f ebenfalls gleichmäßig stetig.

Abgabe über URM bis zum 18.01.2021, 12:00
Besprechung in den Übungen am 20.-22.01.2021