

## 8. Übungsblatt zur Analysis I

**Aufgabe 43:** Welche der Funktionen aus Aufgabe 42 haben ein Maximum und welche ein Minimum im Definitionsbereich? Begründen Sie ihre Vermutung.

**Aufgabe 44:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  stetig. Zeigen Sie, dass  $f$  dann einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein  $c \in [a, b]$ , sodass  $f(c) = c$ .

Hinweis: Betrachten Sie  $g(x) = f(x) - x$ .

**Aufgabe 45:** Sei  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(0) = f(2)$ . Zeigen Sie, dass es ein  $c \in [0, 1]$  gibt, sodass  $f(c) = f(c + 1)$ .

**Aufgabe 46:** Sei eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  gegeben. Zeigen Sie, dass  $x_0 \in \mathbb{R}$  genau dann Häufungspunkt von  $A$  ist, wenn eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in A$ ,  $x_n \neq x_0$  existiert, sodass  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Aufgabe 47:** Seien ein Häufungspunkt  $x_0$  einer Menge  $A \subset \mathbb{R}$  und eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- i) Es existiert ein  $y_0 \in \mathbb{R}$ , so dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .
- ii) Für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in A$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  ist die Bildfolge  $(f(x_n))$  eine Cauchy-Folge.
- iii) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, x' \in A$  mit  $|x - x_0| < \delta$  und  $|x' - x_0| < \delta$  gilt:  
 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ .

**Aufgabe 48:** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$$

Abgabe über URM bis zum 11.01.2021, 12:00

Besprechung in den Übungen am 13.-15.01.2021

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten!