Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 14.12.2020

7. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 37: Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5 + (-1)^n} \right)^n .$$

Begründen Sie, warum das Quotientenkriterium keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz dieser Reihe liefert.

Zeigen Sie mithilfe eines anderen Konvergenzkriteriums, dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 38: Zeigen Sie, dass die Folge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

konvergiert. Schließen Sie dazu zunächst mithilfe von Aufgabe 10, dass

$$\frac{1}{n} > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} .$$

Zeigen Sie dann mit einer der beiden Ungleichungen, dass die Folge (s_n) monoton fallend ist und mithilfe der anderen Ungleichung, dass $s_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Der Grenzwert $\gamma = \lim_{n\to\infty} s_n$ dieser Folge wird als Euler-Mascheroni-Konstante bezeichnet.

Aufgabe 39: Sei (x_n) eine reelle Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \ \ (= \exp(x)) \ .$$

Aufgabe 40: Rechtfertigen Sie die gliedweise Grenzwertnahme in der Bernoulli-Eulerschen Herleitung der Sinus- und Cosinus-Reihe (s. Kapitel I, §4 der Vorlesung).

Aufgabe 41: Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

stetig sind.

Aufgabe 42: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$, und $u : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, mit

$f(x) = x \cdot \sin(1/x) - 2x$, falls $x \neq 0$ und $f(0) = 0$,
$g(x) = \sin(1/x)$, falls $x \neq 0$ und $g(0) = 0$.
$h(x) = (1/x) \cdot \sin(1/x)$, falls $x \neq 0$ und $h(0) = 0$
$u(x) = (1/\sqrt{\sin x}) - 1$, falls $x \neq 0$, $x \neq \pi$ und $u(0) = u(\pi) = 0$.

Welche Funktionen sind stetig?

Abgabe über URM bis zum 21.12.2020, 12:00
Besprechung in den Übungen am 23.12.2020 und 07.-08.01.2021

Weihnachtsaufgabe 1: (Nikolaus' Problem)
Der Nikolaus hat an drei Kinder viele Päckchen auszutragen.

Im ersten Päckchen befindet sich ein Schokobon, im zweiten zwei, im dritten drei und so weiter. Er fragt sich bei welcher Päckchenanzahl er Schokobons fair unter den Kindern verteilen kann.

Könnt ihr dem Nikolaus helfen?

Weihnachtsaufgabe 2: (Der Nikolaus hatte ein Problem)

Der Nikolaus hat nach dem ganzen Geschenke verteilen einen ordentlichen Durst.

Bringe ihm (und dir) etwas zu trinken mit und mache ihm (und dir) einen schönen Abend!

Na? Hat euch das Quizfieber gepackt? Kommt doch am 18. Dezember um 20 Uhr zur Weihnachtsfeier auf unserem Fachschaftsdiscordserver. Dort erfahrt ihr nicht nur die Lösung dieser Aufgabe, neben den üblichen Spiele-Channels wird es diesmal noch einen Quizchannel geben, für alle unter euch, die gerne Rätsel lösen und knobeln.

Wir freuen uns auf euch!