Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 07.12.2020

6. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 31: Bestimmen Sie die Häufungspunkte, sup, inf, lim sup und lim inf der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$u_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 32: Zeigen Sie: Ist s der einzige Häufungspunkt einer beschränkten reellen Folge (s_n), so konvergiert die Folge gegen s.
Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dies für unbeschränkte Folgen nicht gilt.

Aufgabe 33: Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern und $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme. Zeigen Sie:

(a) Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergieren auch die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$.
Hinweis: Für $x, y > 0$ gilt $2\sqrt{xy} \leq x + y$ (warum?)

(b) Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, dann divergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.

Aufgabe 34: Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ das Verhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \right)^{\alpha}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{1}{4n} \leq \left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} \right)^2 \leq \frac{1}{2n+1}$.

Aufgabe 35: Untersuchen Sie die folgenen Reihen auf (absolute) Konvergenz oder Divergenz in Abhängigkeit der reellen Parameter x, s oder a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Aufgabe 36: Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Arcustangens-Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

konvergiert.

Abgabe über URM bis zum 14.12.2020, 12:00
Besprechung in den Übungen vom 16.12.-18.12.2020.