

3. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 13: Leiten Sie aus $\log(ab) = \log a + \log b$ für $a, b > 0$ her, daß

- (a) $\log a^n = n \log a$ für jede natürliche Zahl n (durch Induktion)
- (b) $\log a^x = x \log a$ für jede rationale Zahl x .

Aufgabe 14: Zeigen Sie unter Verwendung der Additionstheoreme für \cos und \sin und mittels Induktion die Formeln von de Moivre aus der Vorlesung.

Aufgabe 15: Leiten Sie unter Verwendung der Potenzreihenentwicklungen für Sinus und Cosinus die Potenzreihe der Tangensfunktion $\tan x = \sin x / \cos x$ bis zur siebten Potenz von x her.

Hinweis: Beachten Sie $\tan(-x) = -\tan(x)$ (warum?) Was bedeutet das für die auftretenden Potenzen in der Reihenentwicklung?

Aufgabe 16: Leiten Sie – wie bereits Newton vor Ihnen – aus der Reihe $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$ für $\arcsin x$ die Reihe für $x = \sin z$ in der Form $x = z + a_3z^3 + a_5z^5 + a_7z^7 + \dots$ und jene von $w = \cos z$ durch Binomialentwicklung von $w = \sqrt{1 - x^2}$ her.

Aufgabe 17: Newton schlug vor, π auf folgende Weise zu berechnen:

$$\pi = 24A + \frac{3\sqrt{3}}{4} = 24 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \frac{1}{2^5} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{7} \frac{1}{2^7} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{2}{9} \frac{1}{2^9} - \dots \right) + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

wobei A die Fläche zwischen x -Achse und dem Kreisbogen $y = \sqrt{x(1-x)}$ von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{4}$ ist.

Begründen Sie beide Schritte dieser Formel unter Zuhilfenahme der Binomischen Reihe.

Aufgabe 18: Berechnen Sie die Fläche a_{12} des dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen 12-Ecks und die Fläche A_{12} des dem Einheitskreis umschriebenen regelmäßigen 12-Ecks. Leiten Sie daraus ab, daß

$$3 < \pi < 12(2 - \sqrt{3}).$$

Hinweis: Was ist $\sin \frac{\pi}{6}$ und $\cos \frac{\pi}{6}$?

Beachten Sie weiters $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ und $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ (warum?).

Abgabe über URM bis zum 23.11.2020, 12:00
Besprechung in den Übungen vom 25.11.-27.11.2020.