Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 09.11.2020

2. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 7: Weisen Sie folgende Formel von Euler nach:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1\cdot 3}{100\cdot 200} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{100\cdot 200\cdot 300} + \text{ etc. }\right)$$

Berechnen Sie die außerdem ersten fünf Teilsummen der Reihe.

Hinweis: Verwenden Sie $50 = 2\cdot 5^2$ und die Reihe für $(1-x)^{-1/2}$ mit einem geeigneten x.

Aufgabe 8: Indem Sie die Reihe $(1+x)^{1/3} = 1+ax+bx^2+cx^3+\ldots$ zweimal mit sich selbst multiplizieren, bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c. Weisen Sie damit unter Beachtung von $2\cdot 4^3 - 5^3 = 3$ die folgende Formel nach:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{1}{1\cdot 125} - \frac{2}{1\cdot 2\cdot (125)^2} + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (125)^3} - \ldots\right).$$

Geschichtliche Notiz: Die Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$ war ein berühmtes Problem der griechischen Mathematik (Verdopplung des Volumens des Würfels).

Aufgabe 9: (Bernoullische Ungleichung, Jac. Bernoulli 1689) Zeigen Sie durch Induktion über n:

(a) $(1+a)^n \geq 1 + na$ für $a \geq -1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) $1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}$ für $0 < a < 1$, $n = 2, 3, \ldots$

Aufgabe 10: Betrachten Sie die Folgen $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Zeigen Sie:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < e < \ldots < b_3 < b_2 < b_1 \quad \text{und} \quad b_n - a_n \leq \frac{4}{n}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 9.

Aufgabe 11: Sei $M \geq N \geq 2x \geq 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=N}^{M} \frac{x^n}{n!} \leq 2\frac{x^N}{N!}.$$

Schließen Sie daraus

$$e^x - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \leq 2\frac{x^N}{N!}.$$

Aufgabe 12: Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion für große Argumente stärker als polynomial anwächst, genauer: Zu jeder natürlichen Zahl n existiert ein x_n, so daß für alle $x \geq x_n$ die Ungleichung $e^x \geq x^n$ gilt.

Abgabe über URM bis zum 16.11.2020, 12:00
Besprechung in den Übungen vom 18.11.-20.11.2020.