§4 Fourierreihen

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ absolut summierbare Folge komplexer Zahlen : $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$

$$\hat{c}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

heißt Fourier-Transformierte der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Eigenschaften :

- $\hat{c}$ 2π-periodisch
- $\hat{c}$ stetig (denn $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \xrightarrow[N\to\infty]{} \hat{c}(t)$ gleichmäßig

  wegen $\left| \hat{c}(t) - \sum_{-N}^{N} c_n e^{int} \right| \leq \sum_{|n|>N} |c_n| \to 0 \quad N\to\infty$

Aus Orthogonalität $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} e^{imt}\, dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

$$\left(= \frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)t} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad m \neq n \right.$$

folgen leicht (Ü17) :

- Umkehrformel

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{c}(t)\, e^{-int}\, dt$$

- Parseval-Formel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{c}(t)|^2\, dt$$

Weiters gilt

- Faltungssatz Seien (c_n), (d_n) absolut summierbar ,

$$(c*d)_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-j}\, d_j \qquad \text{Faltung}$$

Es gilt $\widehat{c*d}\,(t) = \hat{c}(t)\cdot\hat{d}(t)$

genügt: absolut integrierbar

nun umgekehrt: Sei f 2π-periodische stetige Funktion gegeben

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

heißt n-ter <u>Fourierkoeffizient</u> von f, Bez: $\hat{f}(n) = c_n$

<u>Satz 1</u>: Sei f 2π-periodisch, p-mal differenzierbar, $f^{(p)}$ ab. intbar

$\Longrightarrow$

a) Der n-te Fourierkoeffizient von $f^{(p)}$ ist $(in)^p \cdot c_n$

b) $c_n = O(n^{-p})$, $n \in \mathbb{Z}$

<u>Beweis</u>: $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underset{\uparrow}{f^{(p)}(t)}\, \underset{\downarrow}{e^{-int}}\, dt \underset{p.I.}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(p-1)}(t)\cdot(-in)\, e^{-int}\, dt$$

$$= \dots = (in)^p \frac{1}{2\pi}\int f(t)\, e^{-int}\, dt = (-in)^p \cdot c_n$$

weiters $$|c_n \cdot n^p| = \left|\frac{1}{2\pi}\int f^{(p)} e^{-int}\, dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int |f^{(p)}(t)|\, dt \quad \forall n$$

insbesondere: (c_n) ist absolut summierbar, falls f C^2

(tatsächlich bereits für f C^1, ohne

außerdem gilt wieder

<u>Satz 2</u>: (Faltungssatz) Seien f, g 2π-periodisch, stetig

$\Longrightarrow$ Faltung $$f*g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

ist wieder 2π-periodisch und stetig, und

$$\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)$$

<u>Beweis</u>: 2π-per., stetig ✓ (s. Analysis)

$$\widehat{f*g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \cdot e^{-int}\, dt = \frac{1}{4\pi^2}\iint f(\overset{\theta}{t-\tau})\, e^{-in(\overset{\theta}{t-\tau})}\, g(\tau)\, e^{-in\tau}\, dt\, d\tau = \hat{f}(n)\cdot$$

Läßt sich f aus seinen Fourierkoeffizienten rückgewinnen?
Gilt
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad ?$$

Schwierigkeiten: • Ohne zus. VS ist $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ nicht absolut summierbar. In welchem Sinne dann $\sum_{-\infty}^{\infty}$?

• Selbst wenn (c_n) absolut summierbar (z.B. f C^1), ist dann
$$f(t) = \hat{c}(t) \quad \forall t \quad ?$$
Nach Umkehrformel klar: f und $\hat{c}$ haben selbe Fourierkoeff. c_n

Positive Antwort liefert

<u>Satz 3</u> (Fejér 1904) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, 2π-periodisch, mit Fourierkoeff. $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$
$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) c_j e^{ijt} \to f(t) \quad \underline{\text{glm}} \quad \text{für } n \to \infty$$

<u>Bem:</u> $$\sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) c_j e^{ijt} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=-k}^{k} c_j e^{ijt} \right)$$ arithm. Mittel der Partialsummen

$\exists$ stetige Funktionen, für die Partialsummen $\sum_{-n}^{n}$ nicht konvergieren

<u>Beweis:</u> in mehreren Schritten

a) Faltung
$$\left(e^{in\cdot} * f\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = e^{int} \cdot c_n$$
$e^{in\cdot}$: kurz für $\tau \mapsto e^{in\tau}$

daher wegen Linearität:
$$\sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt} c_j = (K_n * f)(t) \quad \text{mit } K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}$$

b) Es gilt $\quad \underline{K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2}$

Nachweis: verwende $\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos t) = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}$

direkte Rechnung liefert (leicht)

$$\left(-\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{+it}\right)\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i(n+1)t}\right)$$

c) Eigenschaften von K_n

i) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)\,dt = \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\frac{1}{2\pi}\int e^{ijt}\,dt \overset{\text{Orth.}}{=} 1$

ii) $K_n(t) \geq 0 \quad \forall t$ ✓ aus b)

iii) $\forall\, \delta \in (0,\pi)$ ist $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(t)\,dt}_{} = 0$

$$|\ast| \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 \to 0$$

d) $(K_n * f)(t) - f(t) \overset{i)}{=}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)\big(f(t-\tau) - f(t)\big)\,d\tau$$

$$\int_0^{2\pi} = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_\delta^{2\pi-\delta}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)\big(f(t-\tau)-f(t)\big)\,d\tau\right| \leq$$

$$\leq \max_{|\tau|\leq\delta} |f(t-\tau) - f(t)| \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)\,d\tau}_{\leq 1}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(\tau) \left(f(t-\tau) - f(\tau) \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(\tau)\, d\tau}_{\to 0 \quad n \to \infty \quad \text{nach (iii)}} \cdot \quad 2 \max_{0 \leq \tau \leq 2\pi} |f(\tau)| \; .$$

$n \to \infty$:

$$\limsup_{n \to \infty} \left| K_n * f(t) - f(t) \right| \leq \max_{|\tau| \leq \delta} |f(t-\tau) - f(t)| \quad \forall \delta$$

$$\downarrow \; \delta \to 0$$

$$0 \quad (f \text{ stetig})$$

Satz von Fejér hat wichtige Folgerungen:

Satz 4: (Eindeutigkeitssatz)

f, g 2π-per, stetig, haben dieselben Fourierkoeffizienten

$\Longrightarrow \quad f = g$

Beweis: $f(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) c_j e^{ij\theta} = g(t) \quad \forall t$ $\square$

Satz 5: Sei f 2π-per, stetig.

(insbes. für f C^1)

Falls die Fourierkoeffizienten (c_n) von f absolut summierbar sind, so gilt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \forall t \qquad \left(c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\, dt \right.$$

Beweis: $f(t)$ und $\hat{c}(t)$ haben dieselben Fourierkoeff. (c_n) $\square$

Satz 6: Jede stetige 2π-periodische Funktion kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden

Beweis: $\sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) c_j e^{ijt} \xrightarrow[\text{glm}]{} f(t)$

falls (c_n) abs. konvergent (z.B. g C^1), ist

$$g(x) = 2\left(\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x)\right) \qquad x = \cos t$$

$$\Uparrow$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

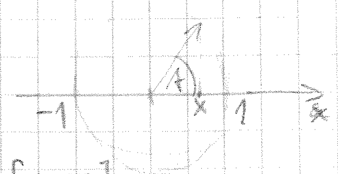
$$c_k = \ldots = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kt \cdot f(t)\, dt$$

Satz 7: (Weierstraß' Approximationssatz)

Jede stetige Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ kann gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.

(d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ Polynom p : $\max\limits_{x \in [a,b]} |g(x) - p(x)| < \varepsilon$)

Beweis: oEdA $[a,b] = [-1,1]$



Setze $f(t) = g(x)$ für $x = \cos t$

$t = \arccos x \in [0,\pi]$

Setze f gerade und 2π-periodisch fort: $f(-t) = f(t)$ $t \in [0,\pi]$

dann

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{+int} f(t)\,dt \underset{\substack{\tau=-t \\ f(t)=f(-t)}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} e^{-in\tau} \underbrace{f(-\tau)}_{f(\tau)}\,d\tau = c_n$$

$$\sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) c_j e^{ijt} = c_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) c_k \cos kt \underset{\text{Fejér}}{\longrightarrow} f(t)$$

Erinnerung: $\cos(k \arccos x) = T_k(x)$ Tschebyscheff-Pol.

$$2\left(\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) c_k T_k(x)\right) \longrightarrow g(x) \quad \text{glm} \quad n \to \infty$$

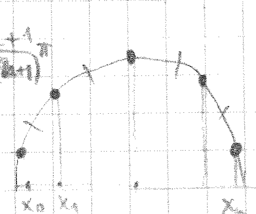
falls f glatt (z.B. C^∞)
$\Rightarrow$ $|c_n|$ fallen rasch ab
$\Rightarrow$ $|\gamma_n|$ —"—
vgl. Bsp. Logarithmus

Bem: Konvergenz kann beliebig langsam sein!

Bem: vgl. Tschebyscheff-Interpolation

Interpolationspolynom $p(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k T_k(x)$

mit $\gamma_k = \frac{2}{n+1}\sum_{l=0}^{n} \overset{f(t_l)}{\overbrace{g(x_l)}} \cos\left(\frac{k(2l+1)}{2(n+1)}\pi\right)$ $\quad t_l = \frac{2l+1}{2(n+1)}\pi$



γ_k ist für gen. großes n Approximation von

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-ikt} f(t)\,dt \overset{\substack{t=-t \\ f \text{ gerade}}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kt \cdot f(t)\,dt$$