7 Erweiterungen des Integralbegriffs

$\int_a^b f(x)\,dx$ bisher (§5) für <u>stetige Funktionen</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ auf abgeschlossenen, beschr. Intervallen

möchten auch:

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ Integrand unbeschränkt auf $(0,1]$

$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ unbeschränktes Intervall

$\int_{-1}^1 \operatorname{sign} x\,dx$ unstetiger Integrand (isolierte Unstetigkeit)

$\int_0^1 \chi(x)\,dx$ mit $\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(abzählbar) unendl. viele Unstetigkeiten

7.1 Uneigentliche Integrale

Bem: (Ü) Falls $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

(Stetigkeit der Stammfn.)

nehmen dies als Motivation für

Def: Sei $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$, falls der Grenzwert existiert

(sagen dann: uneig. Integral konvergiert
sonst: divergiert)

<u>Bem</u>: analoge Def. für $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig

$\alpha = 1$: $\ln x$

<u>Bsp:</u> $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 \begin{cases} \text{existiert nicht für} & \alpha \geq 1 \\ = \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases}$$

<u>Satz 1:</u> (Vergleichskriterium) Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Falls $|f| \leq g$ auf $(a, b]$ und $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergiert, so konvergiert auch $\int_a^b f(x)\,dx$.

(b) Falls $0 \leq g \leq f$ und $\int_a^b g(x)\,dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Beweis:</u> (a) Sei (a_n) bel. Folge mit $a_n \to a+$

Beh. folgt aus

$$\left| \int_{a_{n+k}}^b f(x)\,dx - \int_{a_n}^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_{a_{n+k}}^{a_n} f(x)\,dx \right| \leq \int_{a_{n+k}}^{a_n} |f(x)|\,dx \leq \int_{a_{n+k}}^{a_n} g(x)\,dx$$

mit Cauchy' Konvergenzkriterium.

(b) aus (a) mit g, f in vertauschten Rollen $\square$

<u>Bsp:</u> $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\,dx$ konv. nach (a) und vorigem Bsp.

$\frac{1}{\sqrt{x}} \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\int_0^1 e^{\frac{1}{x}}\,dx$ div. nach (b) wegen $e^{\frac{1}{x}} \geq \frac{1}{x}$

---

verwende analoge Def. für <u>unbeschränkte Intervalle</u>

<u>Def:</u> Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad \text{falls Grenzwert existiert}$$

entsprechend $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ definiert schreibe $-e^{-x}\big|_0$

Bsp: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \begin{cases} \text{divergiert}, & \text{falls } \alpha\le 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha>1 \end{cases}$$

$(\alpha=1:\ \ln x)$

Vergleichskriterium gilt auch mit $[a,\infty)$ statt $(a,b]$ (selber Beweis)

Bsp: Euler' Gammafunktion für $\alpha>0$ def.

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt = \underbrace{\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt}_{\substack{\text{uneig. Integral}\\ \text{für } 0<\alpha<1}} + \underbrace{\int_1^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt}_{\text{uneig. Integral}}$$

konvergent nach Vergl. krit: $t^{\alpha-1}e^{-t} < t^{\alpha-1}$ $\quad \underbrace{t^{\alpha-1}e^{-t/2}}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty}\cdot e^{-t/2}$

$$\exists T>0\ \forall t\ge T:\ t^{\alpha-1}e^{-t}\le e^{-t/2}$$

partielle Integration:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \overset{\uparrow}{t^{\alpha-1}}\,\overset{\downarrow}{e^{-t}}\,dt = \underbrace{\frac{t^\alpha}{\alpha}e^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\alpha}e^{-t}\,dt = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$$

also

$$\underline{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) \qquad \forall\alpha>0}$$

haben $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$

$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1$

$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot 1$

allg:

$$\underline{\Gamma(n) = (n-1)!} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

(Gammafunktion interpoliert Fakultäten)

<u>Satz 2</u>: (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen, Maclaurin 1742)

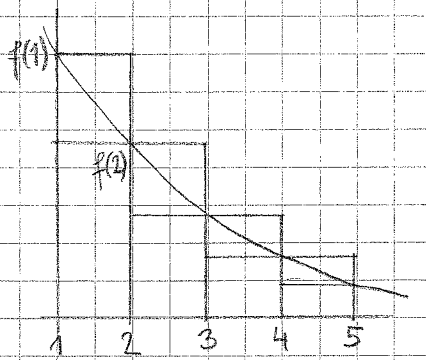
Sei $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig, monoton fallend, $f \geq 0$.

Es gilt: $$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) \text{ konvergiert } \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergiert}$$

<u>Beweis</u>: $\sum_{j=1}^{n-1} f(j)$ und $\sum_{j=2}^{n} f(j)$ sind

Riemann-Summen zu $\int_1^n f(x)\,dx$ mit

$$\sum_{j=2}^{n} f(j) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{j=1}^{n-1} f(j)$$



monoton wachsende Folgen, da $f \geq 0$

Beh. folgt damit aus Vergleichskriterium für Folgen

(§1.3 : (s_n) monoton wachsend, $v_n \leq s_n$: (s_n) konv $\Rightarrow$ (v_n) konv)

<u>Bsp</u>: $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha} \text{ konv } \underset{S.2}{\iff} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ konv } \underset{\text{Bsp. oben}}{\iff} \alpha > 1$$

(bereits aus §2 bekannt, dort anderer Beweis)

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(\ln j)^\beta} \text{ konv } \iff \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} \text{ konv}$$

$$\iff \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{\cancel{e^u}\,du}{\cancel{e^u}\,u^\beta} \text{ konv } \iff \beta > 1$$

$u = \ln x$

$x = e^u \quad dx = e^u du$

<u>Integrale über $(-\infty, \infty)$</u>:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx,$$

falls beide uneig. Integrale konvergieren

Bsp: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ konv., da $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$ und $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ konv.

(nach Vergleichskriterium: $e^{-x^2} \le e^{-|x|}$ für $|x| \geq 1$)

Integrale von Funktionen mit isolierten Unstetigkeiten

$f : [a,c] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b)$ und $(b,c]$ $\quad (a<b<c)$

$$\int_a^c f(x)\,dx := \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx ,$$

falls beide uneig. Integrale konvergieren

Bsp: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x\,dx = \int_{-1}^{0} \underbrace{\operatorname{sign} x}_{-1}\,dx + \int_{0}^{1} \underbrace{\operatorname{sign} x}_{1}\,dx = -1+1 = 0$

Bem: Vorsicht! Frühere Sätze über Vertauschen von Grenzwert und Integral gelten nicht für uneig. Integrale.

Bsp: $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x/n} \quad (n \geq 1)$

$f_n \to 0$ glm auf $[0,\infty)$

wissen aus §5.4: für $b > 0$ $(b \in \mathbb{R})$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f_n(x)\,dx = \int_0^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx ,$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\frac{x}{n}} \frac{dx}{n} \underset{t=\frac{x}{n}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \int_0^{b/n} e^{-t}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-s}\,ds = 1$$

und

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0$$

7.2 Riemann-Integral und verallgemeinertes Riemann-Integral

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion

Zerlegung D : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, dazu $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$

Riemann-Summe $\quad S(D) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1})$

<u>Def</u>: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Riemann-integrierbar</u>, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß

$$(R)\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \text{ Zerlegung } D \text{ mit } x_j - x_{j-1} < \delta \text{ für alle } j = 1,\dots,n : \\ \qquad |S(D) - s| < \varepsilon \end{cases}$$

def. $\int_a^b f(x)\,dx := s$ (nach Riemann 1854)

<u>Prop</u>: f stetig : §5.1 , aber auch

<u>HS</u>: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (oder fallend)
$\Longrightarrow$ f Riemann-integrierbar

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon > 0$ geg.,

$D = (x_0, x_1, \dots, x_n ; \xi_1, \dots, \xi_n)$ Zerlegung mit $|x_j - x_{j-1}| < \delta \ \forall j$

$D_- = (x_0, x_1, \dots, x_n ; x_0, \dots, x_{n-1})$

$D_+ = (x_0, x_1, \dots, x_n ; x_1, \dots, x_n)$

$\delta = \varepsilon / (f(b) - f(a))$ (s.u.)

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\,(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,(x_j - x_{j-1})$$

also $\quad S(D_-) \le S(D) \le S(D_+)$

ebenso für jede Verfeinerung D' von D : $S(D_-) \le S(D') \le S(D_+)$

$$S(D_+) - S(D_-) = \sum_{j=1}^{n} \big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big)\,(x_j - x_{j-1})$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big) \cdot \delta = \big(f(b) - f(a)\big)\,\delta = \varepsilon$$

also $|S(D) - S(D')| \le \varepsilon$, daraus Beh. wie in (c) des Beweises von S.1, §5.II

Beispiel einer nicht Riemann-integrierbaren Funktion auf $[0,1]$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad , \quad \text{denn} \quad S(D) = \begin{cases} 1 & \text{falls alle } \xi_j \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{kein} \end{cases}$$

Für Vertauschen von Grenzwert und Integral brauche bei Riemann-Integral glm. Konvergenz, oft zu einschränkend

---

Lebesgue 1904: erweiterter Integralbegriff,
heute Standardintegral der Mathematik
$\longrightarrow$ Analysis $\overline{\underline{\text{IV}}}$

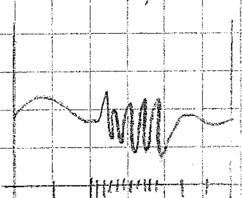
Bem: Es gilt: (f Riemann-intbar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f Lebesgue-intbar)

obige Funktion χ Lebesgue-intbar

wichtig: für Lebesgue-Integral gelten Sätze über monotone und dominierte Konvergenz analog jenen für Reihen in §2

Kurzweil 1957, Henson 1961: verallgemeinertes Riemann-Integral

Idee: verlange nicht, daß Zerlegung überall gleich fein ($< \delta$), sondern feiner dort, wo sich Funktion stark ändert



Def: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt verallgemeinert Riemann-integrierbar (oder Kurzweil-integrierbar), falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß

$$(R^*) \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ Funktion } \delta : [a,b] \to (0,\infty) \\ \forall \text{ Zerlegung } D \text{ mit } x_j - x_{j-1} < \delta(\xi_j) \text{ für alle } j : \quad |S(D) - s| < \varepsilon \end{array} \right.$$

def. $\int_a^b f(x)\,dx := s$

klar: f Riemann-intbar $\Rightarrow$ f verallgemeinert Riemann-intbar (i.f. kurz: R^*-intbar)

und Integrale stimmen überein

Bsp: $\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

wissen $\chi : [0,1] \to \mathbb{R}$ nicht Riemann-intbar

Beh: χ ist R^*-intbar

Beweis: Sei (q_n) Folge, in der alle rationalen Zahlen von $[0,1]$ genau einmal vorkommen (Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$), z.B.

$(q_n) = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cancel{\frac{2}{4}}, \frac{3}{4}, \dots)$

Sei $\varepsilon > 0$ geg.

setze $\delta(\xi) = \begin{cases} \varepsilon \cdot 2^{-k} & \text{falls } \xi = q_k \\ 1 & \xi \text{ irrational} \end{cases}$

Sei D Zerlegung mit $x_j - x_{j-1} < \delta(\xi_j)$ für alle j, dann:

$$0 \le S(D) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\chi(\xi_j)}_{0 \text{ oder } 1} \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\le \delta(\xi_j)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \delta(q_k) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \varepsilon$$

somit erfüllt χ Bedingung (R^*) $\square$

Bem (ohne Beweis) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion

f Lebesgue-intbar $\Leftrightarrow$ f und $|f|$ R^*-intbar

Gilt Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch für verallgemeinertes Riemann-Integral?

Satz: Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar

$\Rightarrow$ $f = F'$ ist R^*-intbar und

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ bel.

Für $x_0 \in [a,b]$ existiert nach VS $f(x_0) = F'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$

daher
$$\exists \delta(x_0) > 0 \quad \forall x \in [a,b] \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta(x_0):$$
$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

haben damit
$$\delta : [a,b] \to (0, \infty), \text{ sodaß}$$

$$\forall \xi \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] \text{ mit } |x - \xi| < \delta(\xi):$$
$$|F(x) - F(\xi) - (x - \xi) f(\xi)| \leq \varepsilon |x - \xi| .$$

Für x, x' mit $a \leq x \leq \xi \leq x' \leq b$ und $0 < x' - x < \delta(\xi)$ folgt

$$|F(x') - F(x) - (x' - x) f(\xi)| \leq$$
$$\leq |F(x') - F(\xi) - (x' - \xi) f(\xi)| + |F(x) - F(\xi) - (x - \xi) f(\xi)|$$
$$\leq \varepsilon (x' - \xi) + \varepsilon (\xi - x) = \varepsilon (x' - x)$$

Sei D Zerlegung mit $x_j - x_{j-1} < \delta(\xi_j)$. Für
$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} \left(F(x_j) - F(x_{j-1}) \right)$$

gilt
$$|F(b) - F(a) - S(D)| =$$
$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \left(F(x_j) - F(x_{j-1}) - f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right) \right|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \quad \text{"} \quad \right|$$
$$\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon (b - a)$$

somit Bed. (R^*) erfüllt mit $s = F(b) - F(a)$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Bem: Beh. bleibt richtig, falls F auf $[a,b]$ diffbar mit Ausnahme abzählbar vieler Punkte
(beachte: Änderung von f in abzählbar vielen Punkten ändert nicht R^*-Integral von f. Wie bei χ oben)

Bem: f R^*-intbar $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ diffbar?

nein, aber leicht (wie in §6): F diffbar in jedem Punkt, in dem f stetig ist

Bsp: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist auf $(0,1]$ Ableitung von $F(x) = 2\sqrt{x}$

nach Satz ist $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ (z.B. mit $f(0) = 0$) R^*-intbar und

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$$

bisher als uneig. Integral
jetzt als verallg. Riemann-Integral

Vertauschen von Grenzwert und verallgemeinertem Riemann-Integral

(selbe Sätze auch für Lebesgue-Integral)

<u>Satz</u>: (monotone Konvergenz)
Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ monoton wachsende Folge R^*-intbarer Fkt:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \qquad \forall x \in [a,b]$$

$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ existiere für alle $x \in [a,b]$

Es gebe Schranke $B \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f_n(x)\,dx \leq B \quad \forall n \geq 1$

$\Longrightarrow$ f ist R^*-intbar und $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

<u>Satz:</u> (dominierte Konvergenz)

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ Folge R^*-intbarer Funktionen

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R^*-intbar

Es sei

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ existiere für alle $x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ f ist R^*-intbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \quad .$$

(ohne Beweis; für Lebesgue-Integral in Analysis $\overline{\underline{\text{IV}}}$)

nicht richtig für Riemann-Integral!