2 Integration stetiger Funktionen

10.1 Integralrechnung: Vorbemerkungen

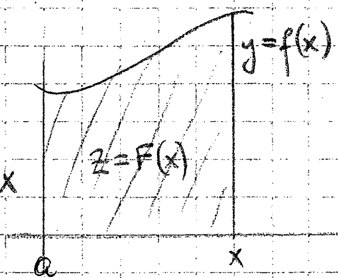
Berechnung von Flächen seit der Antike: Archimedes, ...

entscheidende Entdeckung von Newton, Leibniz, Joh. Bernoulli:

Integration ist Umkehrung der Differentiation!

ermöglicht Reduktion der mühseligen Flächenberechnung auf ein paar Ableitungsregeln

Stammfunktionen (engl. primitives)



berechne Fläche zwischen x-Achse und Kurve $y=f(x)$

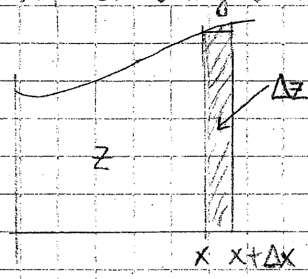
fixiere a, sei $z=F(x)$ Fläche unter Kurve zw. a und x

Es gilt:

Die Funktion $f(x)$ ist die Ableitung von $F(x)$: $f(x)=F'(x)$

Erklärung:

Newton 1671/86 betrachtet Änderung der Fläche bei Änderung von x:



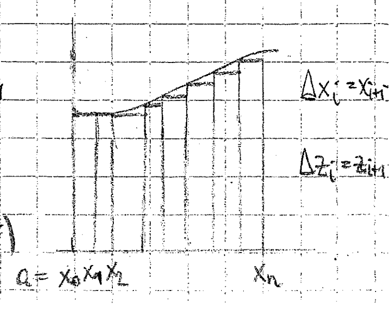
$$\Delta z = F(x+\Delta x) - F(x)$$
$$\approx f(x)\,\Delta x$$

(= bis auf Terme in höheren Potenzen von Δx)

damit für $\Delta x \to 0$: $\quad \frac{\Delta z}{\Delta x} \to f(x)$ bzw.

$$\frac{dz}{dx} = f(x) \qquad (*)$$

Leibniz 1686 stellt sich Fläche als Summe schmaler Rechtecke vor:



$$z(x_n) \approx z_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$
$$= \Sigma f(x_i)\Delta x_i \qquad \text{Summe}$$

damit $\Delta z_n = f(x_n)\Delta x_n$, daraus für $\Delta x_i \to 0$ wieder $(*)$

Leibniz schreibt für Fläche $\int f(x)\,dx$ ("$\int$ pro summis

Joh. Bernoulli : "Integral"

heute: schreiben für Fläche zwischen Grenzen a und b

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(Fourier 1822)}$$

"unbestimmtes Integral" $\int f(x)\,dx$ heute Bez. für

beliebige Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$.

Eine solche Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion der Funktion f(

Stammfunktionen nicht eindeutig: falls $F(x)$ Stammfn., so

$F(x) + C$ mit beliebiger Konstante C.

Fläche unter $y = f(x)$ zwischen a und veränderlicher Grenze b

ist jene Stammfunktion, die bei $b = a$ den Wert 0 annim

$$0 = F(a) + C, \quad \text{also} \quad C = -F(a),$$

somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

"Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung",

strenger Beweis später.

(offene Fragen: Gibt es außer $F(x) + C$ keine weiteren Stammfun
~~Existiert immer Stammfunktion?~~

Schreibweise oft $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

damit

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Erhalte Formeln für Stammfunktionen durch Umkehrung von Differentiationsformeln!

Bsp: x^2 hat $2x$ als Ableitung (s. oben)

daher: $\frac{x^2}{2}$ ist Stammfunktion von x

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Sammlungen von Stammfunktionen: Integraltafeln,

z. B. Gradshtein & Ryzhik, Gröbner & Hofreiter

heute eingebaut in symbolischen Computerprogrammen: Maple, Mathematica

z. B. int(1/sqrt(1-x^2), x) ergibt Ausgabe arcsin x ✓

int(sqrt(1-cos(x)^2), x = 0 .. 3.14159) ergibt −2 !

2 Integration stetiger Funktionen

2.1 Integral als Grenzwert

Cauchy 1823 : für stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

def. $$\int_a^b f(x)\,dx := \lim \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\,\Delta x_j$$

wobei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $\qquad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j$

Grenzwert in welchem Sinn ? $\quad (\Delta x_j \to 0,\ N \to \infty)$

Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit ausgezeichneten Punkten

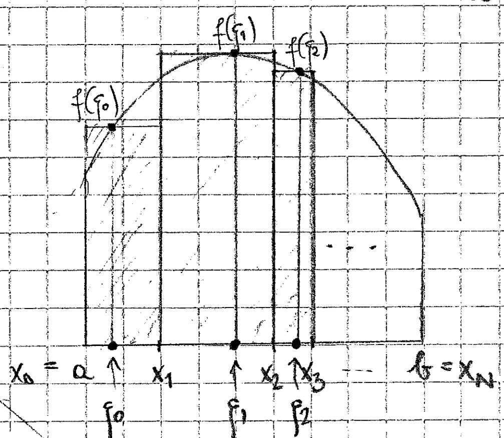
(kurz Zerlegung, frz., engl. decomposition) :
Division

$D = (x_0, x_1, \dots, x_N ; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1})$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$

def. $$S(D) := \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j$$ "Riemann-Summe" von f zur Zerlegung D (nach Riemann 1854)

mit $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$

schreiben $$|D| = \max_{j=0,\dots,N-1} \Delta x_j$$



(Bei Cauchy $\xi_j = x_j$)

Satz und Def: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann gibt es eine reelle Zahl s, sodaß

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall D \text{ Zerlegung mit } |D| < \delta : \quad |S(D) - s| < \varepsilon$$

definiere $$\int_a^b f(x)\,dx := s$$

Es gilt daher: Für jede Folge von Zerlegungen (D_n) mit $|D_n| \to 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n) = \int_a^b f(x)\,dx .$$

<u>Beweis</u>: (a) wissen aus §4.2 (S.v. Heine): f <u>glm</u> stetig auf $[a,b]$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in [a,b],\ |x-x'| < \delta : \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

(b) Zerlegung D' heißt <u>Verfeinerung</u> von D, falls alle Unterteilungspunkte x_j von D auch in D' vorkommen

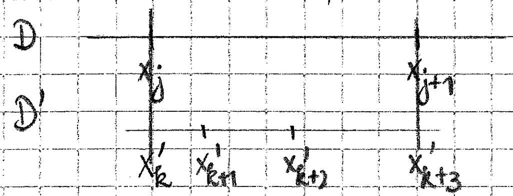
zeigen:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall D \text{ Zerl. mit } |D| < \delta \quad \forall D' \text{ Verfeinerung von } D: \\ \qquad\qquad |S(D) - S(D')| < \varepsilon (b-a) \end{array} \right.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle dazu $\delta > 0$ von glm Stetigkeit (a)

Sei D Zerl. mit $|D| < \delta$, D' Verfeinerung von D

Bild:



beachte $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j =$
$= x'_{k+3} - x'_{k+2} + x'_{k+2} - x'_{k+1} + x'_{k+1} - x'_k$
$= \Delta x'_{k+2} + \Delta x'_{k+1} + \Delta x'_k$

schreibe $S(D) = \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j = \sum_{k=0}^{N'-1} f(\eta_k)\,\Delta x'_k$

mit $\eta_k = \xi_j$, falls $[x'_k, x'_{k+1}] \subset [x_j, x_{j+1}]$

andererseits $S(D') = \sum_{k=0}^{N'-1} f(\xi'_k)\,\Delta x'_k$

haben
$$\left.\begin{array}{l} \eta_k \in [x_j, x_{j+1}] \\ \xi'_k \in [x'_k, x'_{k+1}] \subset [x_j, x_{j+1}] \end{array}\right\} \quad |\eta_k - \xi'_k| \leq \Delta x_j < \delta$$

nach (a) folgt $|f(\eta_k) - f(\xi'_k)| < \varepsilon$

damit
$$|S(D) - S(D')| = \left| \sum_{k=0}^{N'-1} \big(f(\eta_k) - f(\xi'_k)\big)\,\Delta x'_k \right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{N'-1} \underbrace{|f(\eta_k) - f(\xi'_k)|}_{< \varepsilon} \cdot \Delta x'_k < \varepsilon \sum_k \Delta x'_k = \varepsilon (b-a)$$

also gilt $(*)$

(c) Sei (D_n) Folge von Verfeinerungen von D, sodaß

D_{n+1} Verfeinerung von D_n, $\quad |D_n| \to 0$ für $n \to \infty$

setze $s_n = S(D_n)$

nach (*) ist (s_n) Cauchy-Folge, also konvergent: $s_n \to s \in \mathbb{R}$

Sei $\varepsilon > 0$ geg., dazu $\delta > 0$ von (*), D mit $|D| < \delta$

nach (*): $\quad |S(D) - S(D_n)| < \varepsilon(b-a)$.

lasse $n \to \infty$: $\quad |S(D) - s| \leq \varepsilon(b-a) < 2\varepsilon(b-a) =: \varepsilon'$

damit gezeigt:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall D, |D| < \delta : \quad |S(D) - s| < \varepsilon' \qquad \square$$

Bsp: (Kap. I, §3.1, Fermat) $\quad \int_0^b x^m \, dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$

hatten dort Zerlegung $D: \underset{\substack{\| \\ x_0}}{0} < \underset{\substack{\| \\ x_1}}{\theta^N b} < \theta^{N-1} b < \ldots < \theta b < b$ mit $\theta < 1$

$\xi_j = x_j$

2.2 Einfache Rechenregeln

HS1: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis: entsprechende Gleichungen gelten trivialerweise für Riemann-Summen daher auch für Grenzwert. $\square$

HS2: Sei $a < b < c$, $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Beweis: wähle Folge von Zerlegungen (D_n) mit b als Unterteilungspunkt $\square$

Falls $a < b$, def. $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^a f(x)\,dx := 0$

Damit bleibt HS für bel. $a, b, c \in \mathbb{R}$ richtig, soferne f stetig auf einem Intervall, das a, b, c enthält.

schreiben i.f. für reelle Funktionen $f \leq g$, falls $f(x) \leq g(x)\ \forall x$

<u>HS 3:</u> Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Falls zusätzlich $f(x_0) < g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$, gilt $<$ auch bei den Integralen.

<u>Beweis:</u> $(\leq)$: Ungl. gilt für Riemann-Summen, damit für Grenzwert

$(<)$: Sei $\varepsilon := g(x_0) - f(x_0) > 0$

Da $d := g - f$ stetig, gibt es $\delta > 0$, sodaß

$$|d(x) - d(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

und daher

$$\begin{aligned} d(x) &\geq d(x_0) - |d(x) - d(x_0)| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{-"-} \end{aligned}$$

$$\int_a^b d(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} \underbrace{d(x)}_{\substack{\text{VI}\\0}}\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \underbrace{d(x)}_{\substack{\text{VI}\\ \varepsilon/2}}\,dx + \int_{x_0+\delta}^{b} \underbrace{d(x)}_{\substack{\text{VI}\\0}}\,dx$$

$$\underset{\text{1. Teil HS}}{\geq} 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varepsilon}{2}\,dx + 0 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\delta > 0$$

Beh. folgt damit aus $0 < \int_a^b d(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$ $\square$

<u>HS 4:</u> (Dreiecksungl. für Integrale) Für $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

<u>Beweis:</u> Für Riemann-Summen ist nach Δ-Ungl.

$$\left| \sum_j f(\xi_j)\,\Delta x_j \right| \leq \sum_j |f(x_j)|\,\Delta x_j$$

und damit auch für Grenzwert (beachte: $|f|$ stetig) $\square$

2.3 Mittelwertsatz

<u>Satz:</u> $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g \geq 0$

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]:$ $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$

<u>Beweis:</u> nach Satz vom Maximum und Minimum (§3.4) gibt es $x_*, x^* \in [a,b]$

mit $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ $\forall x \in [a,b]$ $\quad | \cdot g(x)$

$$\underset{HS3}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\int_a^b f(x_*)\,g(x)\,dx}_{= f(x_*) \int_a^b g(x)dx} \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b f(x^*)\,g(x)\,dx}_{= f(x^*) \cdot \int_a^b g(x)\,dx}$$

falls $\int_a^b g(x)dx = 0$: fertig

sonst > 0, erhalte für $c = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx$

$$f(x_*) \leq c \leq f(x^*)$$

nach Zwischenwertsatz (§3.4): $\exists \xi$ zwischen x_* und x^* mit $f(\xi) = c$ $\square$

speziell: für $g(x) = 1$ erhalten

<u>Folgerung:</u> (<u>Mittelwertsatz</u>, Cauchy 1823) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]:$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a)$ $\square$

12.1.

3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Integrationstechniken

3.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Def: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Eine <u>Stammfunktion</u> von f ist eine stetige Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, die auf (a,b) diffbar ist mit

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x\in(a,b) .$$

Satz 1: (Existenz einer Stammfunktion) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Die Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ def. durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ist eine Stammfunktion von f.

Beweis: F existiert nach §5.1. Seien $x, x_0 \in (a,b)$.

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \underset{§5.2}{=} \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

zu bel. $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodaß für $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

damit
$$|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt \right|$$
$$= \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{(f(t) - f(x_0))}_{\substack{<\varepsilon \\ >-\varepsilon}}\,dt \right| < \varepsilon\,|x - x_0|$$

Es folgt
$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)$$

somit F diffbar in x_0, $F'(x_0) = f(x_0)$

(leicht: F stetig auf $[a, b]$, Ü) $\square$

Satz 2: (Eindeutigkeit der Stammfunktion bis auf eine Konstante)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und seien F_1, F_2 Stammfn. von f.
$\Longrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in [a, b] : \quad F_1(x) = F_2(x) + C$

Beweis: $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

$\Longrightarrow \quad F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \quad$ "

nach Folg. 1 aus MWS der Differentialrechnung (Lagrange, §6.3):

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] : F_1(x) - F_2(x) = C$$ $\square$

Satz 3: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f eine Stammfunktion F eindeutig bis auf eine additive Konstante, und

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: nach S.1, S.2 ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$, damit:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt + C - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} - C = \int_a^b f(t)\,dt$$ $\square$

Bem: "Stammbaum" des Hauptsatzes

reelle Zahlen — um 1870

↓

Cauchy' Konv. krit.

↓

Bolzano' sup-Satz

↓

Bolzano-Weierstraß

↙ ↘

Heine (glm. stetig) — 1872

Satz v. Max, Min

↓

Integral stetiger Funktionen

MWS (Lagrange)

↓

∃ Stammfn. — Stammfn. eindeutig

↘ ↙

Hauptsatz Diff.- Int. — Newton 1671, Leibniz 1684

~~Bem: Hauptsatz rechtfertigt Integrationstechniken von Kap. II:~~

~~Produktregel → partielle Integration~~

~~Kettenregel → Substitution~~

19.1.9

in den folgenden beiden Abschnitten wichtige Integrationstechniken:

3.2 Substitution

Sei $F(z)$ Stammfunktion von $f(z)$, also $F'(z) = f(z)$

substituiere $z = g(x)$, damit aus Kettenregel:

$F(g(x))$ ist Stammfunktion von $f(g(x))\, g'(x)$

somit $\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(b)) - F(g(a))$

andererseits auch $\int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\, dz = F(g(b)) - F(g(a))$:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\, dz = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

formal: substituiere $z = g(x)$, $dz = g'(x)\, dx$

Bsp: • $\int e^{5x+2}\, dx = \int e^z \frac{dz}{5} = \frac{1}{5} e^z = \frac{1}{5} e^{5x+2}$

$z = 5x+2$, $dz = 5\, dx$

(allg: für Funktionen $f(ax+b)$ Substitution $z = ax+b$ oft hilfr

• manchmal Faktor $g'(x)$ leicht zu erkennen:

$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^z dz = -\frac{1}{2} e^z = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

$z = -x^2$, $dz = -2x\, dx$

• kennen $\int \frac{dz}{1+z^2} = \arctan z$

$\int \frac{dx}{7+x^2} = \int \frac{\sqrt{7}\, dz}{7(1+z^2)} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan z = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}}$

$x^2 = 7z^2$ bzw. $x = \sqrt{7}\, z$, $dx = \sqrt{7}\, dz$

quadratische Ausdrücke $x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + (c-b^2)$,

substituiere $z = x + b$:

- $$\int \frac{dx}{x^2+x+1} \underset{\substack{\uparrow \\ z = x+\frac{1}{2}}}{=} \int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2z}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

- $$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1}\, dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$z = x^2+x+1$

$dz = (2x+1)\, dx$

3.3 Partielle Integration

Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ ergibt

$$u(x)v(x) = \int \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right) dx \qquad \text{bzw.}$$

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx$$

"partielle Integration"

zwischen Grenzen a und b:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

Integral auf rechter Seite u. U. leichter zu berechnen

Bsp: • $\int \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\sin x}_{u'}\,dx = -x\cos x + \int 1\cdot\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x$

$v' = 1, \quad u = -\cos x$

• manchmal wiederholte partielle Integration nötig:

$$\int \underbrace{x^2}_{v}\,\underbrace{e^x}_{u'}\,dx = x^2e^x - 2\int \underbrace{x}_{\text{neues } v}\,\underbrace{e^x}_{u'}\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$v' = 2x, \quad u = e^x \qquad\qquad v' = 1 \quad u = e^x$

• Funktionen mit einfacher Ableitung in Rolle von v:

$$\int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x$$

$u = x \quad v' = \frac{1}{x}$

oder noch einmal:

- $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^{\overbrace{2}^{-1+1}}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$(u'=1,\ v=\sqrt{1-x^2})$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \underbrace{\int \sqrt{1-x^2}\,dx}_{\text{urspr. Integral}} + \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\arcsin x}$$

$\rightarrow$ auf linke Seite der Gl.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

Rekursionen: berechne

- $$I_n = \int \sin^n x\,dx$$

setze $u' = \sin x$, $v = \sin^{n-1} x$

$u = -\cos x$, $v' = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x$

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \sin^{n-2} x\,dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

erlaubt rekursive Berechnung aus $I_0 = \int dx = x$ (falls n gerade)
oder $I_1 = \int \sin x\,dx = -\cos x$ (falls n ungerade)

(noch einmal:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 z\,dz = \int dz - \int \sin^2 z\,dz = z + \frac{1}{2}\cos z \sin z - \frac{1}{2}z$$

Subst. $x = \sin z$ $\quad \sqrt{1-x^2} = \cos z$ $\quad$ | $= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$)

$dx = \cos z\,dz$

12.11.

- $$J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

$$2x^2 = 2(1+x^2) - 2$$

$$J_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + n \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\, J_n - 2n J_{n+1}$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n$$

damit rekursive Berechnung ausgehend von $J_1 = \arctan x$

3.4 Integration rationaler Funktionen

geben einige Klassen von Funktionen, deren Integral elementare Funktion ist: zusammengesetzt aus Polynomen, rationalen Funktionen, exp, ln, trigonometrische und inverse trig. Funktionen

insbes. berechnen $\int R(x)\, dx$ für rationale Funktionen $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

(P, Q Polynome)

schreiben dazu $R(x)$ in geeigneter Form als Polynom + Summe von Brüchen einfacherer Gestalt ("Partialbrüche"), nach Joh. Bernoulli und Leibniz ~ 1700, Euler 1768

brauchen dafür:

Polynomdivision mit Rest

$$(*) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{Q(x)} \quad ,$$

wobei M, N Polynome und $\deg N < \deg Q$

Grad von N

M Quotient , N Rest

(vgl. $\frac{26}{7} = 3 + \frac{5}{7}$)

Bsp: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}$

entfernen führenden Term:

$$P(x) - 2x\,Q(x) = \cancel{2x^6} - 3x^5 - 9x^4 + \dots$$
$$- \cancel{2x^6} - 2x^5 + 10x^4 + \dots$$
$$= -5x^5 + x^4 + \dots =: P_1(x)$$ Grad 5

$$P_1(x) + 5\,Q(x) = \cancel{-5x^5} + x^4 + \dots$$
$$\cancel{+5x^5} + 5x^4 + \dots$$
$$= 6x^4 - 20x^2 + 4x + 19 =: P_2(x)$$ Grad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x + \frac{P(x) - 2x\,Q(x)}{Q(x)} = 2x + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$
$$= 2x - 5 + \frac{P_1(x) + 5\,Q(x)}{Q(x)} = 2x - 5 + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

erhalte hier $(*)$ mit $M(x) = 2x - 5$, $N(x) = P_2(x)$

allgemein: sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

$Q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$, $b_m \neq 0$ $\quad m \le$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{P_1(x)}{Q(x)} \quad \text{mit} \quad P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x)$$

Pol. vom Grad $\le n-1$

rekursive Anwendung dieser Prozedur liefert $(*)$

Partialbruchzerlegung

nehmen an, daß Faktorisierung von $Q(x)$ bekannt sei:

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k} = \prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)^{m_j}$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ die (evtl. komplexen) voneinander verschiedenen Nullstellen von $Q(x)$ mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_k$.

Sei $P(x)$ Polynom mit $\deg P < \deg Q$

<u>Beh</u>: Es existieren Konstanten C_{je}, sodaß

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m_j}\frac{C_{je}}{(x-\alpha_j)^l} \qquad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

<u>Beweis</u>: eliminieren nacheinander die Faktoren von $Q(x)$ wie folgt:

schreibe $Q(x) = (x-\alpha)^m q(x)$, wobei α Nst. von Q, $q(\alpha) \neq 0$

zeigen: es gibt Konstante C und Polynom $p(x)$ vom Grad $< \deg Q - 1$ mi[t]

$$(*) \quad \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m q(x)} = \frac{C}{(x-\alpha)^m} + \frac{p(x)}{(x-\alpha)^{m-1} q(x)}$$

bzw. äquivalent

$$P(x) = C q(x) + p(x)(x-\alpha)$$

Mit $C := \frac{P(\alpha)}{q(\alpha)}$ hat $P(x) - Cq(x)$ die Nullstelle α und

damit ist $p(x) := \frac{P(x) - Cq(x)}{x-\alpha}$ Polynom (vom Grad $< \deg Q - 1$)

erhalte (*)

wende selbes Argument rekursiv auf rechte Seite von (*) an, erhalte Partialbruchzerlegung.

Bsp: $Q(x)$ aus §5.1 hat Faktorisierung

$$x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = (x-1)^3 (x+2)^2$$

Berechnung der PBZ wie in obigem Beweis oder wie folgt:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{6x^4 - 20x + 4x + 19}{(x-1)^3 (x+2)^2} = \frac{A_0}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} \underbrace{+ \frac{B_0}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2}}_{\mathcal{B}(x)}$$

mult. mit $(x-1)^3$:

$$\frac{P(x)}{(x+2)^2} = A_0 + A_1 (x-1) + A_2 (x-1)^2 + (x-1)^3 \mathcal{B}(x)$$

erhalte A_0, A_1, A_2 als erste Koeffizienten der Taylorreihe wie in

$$A_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x+2)^2} \right) \Bigg|_{x=1} \qquad (j = 0,1,2)$$

ergibt $A_0 = 1$, $A_1 = -2$, $A_2 = 3$.

Ebenso (mult. oben mit $(x+2)^2$):

$$B_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3} \right) \Bigg|_{x=-2} \qquad (j = 0,1)$$

erhalte $B_0 = -1$, $B_1 = 3$

Integration der Partialbrüche

$\int R(x)\,dx = ?$, haben $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{Q(x)} = M(x) + \sum_j \sum_\ell \ldots$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^\ell} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(\ell-1)(x-\alpha)^{\ell-1}} & \ell > 1 \\[2ex] \ln(x-\alpha) & \ell = 1 \end{cases}$$

für obiges Bsp: $\displaystyle\int \frac{2x^6-3x^5-9x^4+23x^3+x^2-44x+39}{x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4}\,dx$

$$= \int (2x-5)\,dx + \int \frac{dx}{(x-1)^3} - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 3\int \frac{dx}{x-1}$$

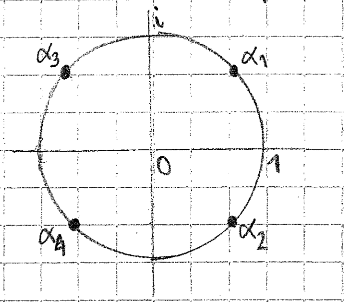
$$- \int \frac{dx}{(x+2)^2} + 3\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= x^2 - 5x - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\ln(x-1)$$

$$+ \frac{1}{x+2} + 3\ln(x+2) + C$$

Bsp. mit komplexen Nullstellen: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$

Nst. von x^4+1: $\alpha_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\alpha_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \overline{\alpha_1}$, $\alpha_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\alpha_4 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = \overline{\alpha_3}$



$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{C_1}{x-\alpha_1} + \frac{C_2}{x-\alpha_2} + \frac{C_3}{x-\alpha_3} + \frac{C_4}{x-\alpha_4}$$

erhalten wie in §5.2: $C_1 = \left.\frac{1}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}\right|_{x=\alpha_1} = \frac{1}{i\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+i}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)$$

ebenso $C_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1+i) = \overline{C_1}$, $C_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$, $C_4 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) = \overline{C_3}$

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \sum_{j=1}^{4} C_j \int \frac{dx}{x-\alpha_j} = \sum_{j=1}^{4} C_j \ln(x-\alpha_j)$$

möchte aber reellen Ausdruck für das Integral einer reellen Funk

z. B. ist:

17.11.

$$\int \left(\frac{C_1}{x-\alpha_1} + \frac{C_2}{x-\alpha_2}\right) dx = \int \left(\frac{C_1}{x-\alpha_1} + \frac{\overline{C_1}}{x-\overline{\alpha_1}}\right) dx$$

$$\frac{c}{z} + \frac{\bar{c}}{\bar{z}} = \frac{c\bar{z} + \bar{c}z}{z\bar{z}} = \frac{2\,\mathrm{Re}\,(c\bar{z})}{|z|^2}$$

hier $z = x - \alpha_1 = x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ $\qquad |z|^2 = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$$= x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1$$

$$\mathrm{Re}\,(c\bar{z}) = \mathrm{Re}\,\frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{8}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{8}$$

damit: $$\int \left(\frac{c_1}{x-\alpha_1} + \frac{c_2}{x-\alpha_2}\right)dx = \int 2\,\frac{-\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}\,dx$$

$$\underset{t = x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\uparrow}\!\!= -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2t}{t^2 + \frac{1}{2}}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\sqrt{2}\cdot t$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\cdot x - 1\right)$$

ebenso $$\int \left(\frac{c_3}{x-\alpha_3} + \frac{c_4}{x-\alpha_4}\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\cdot x + 1\right)$$

somit: $$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\cdot x + 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}\cdot x - 1\right)$$

3.5 Euler' Substitutionen, die auf Integrale rationaler Funktionen zurückführen

i.f. sei R rationale Funktion von einer oder mehreren Veränderlichen

- Integrale der Form $\int R\left(\sqrt[n]{ax+b},\, x\right)dx$:

substituiere $\sqrt[n]{ax+b} = u$, $\quad x = \frac{u^n - b}{a}$, $\quad dx = \frac{n u^{n-1}}{a}\,du$

ergibt $\int R\left(\sqrt[n]{ax+b},\, x\right)dx = \frac{n}{a}\int R\left(u, \frac{u^n - b}{a}\right)du$ $\quad$ Int. einer rationalen

• Integrale der Form $\int R(\sqrt{ax^2+2bx+c}, x)\,dx$:

Euler def. neue Variable z durch $ax^2+2bx+c = a(x-z)^2$

damit

$$x = \frac{az^2-c}{2(b+az)}, \qquad dx = \frac{a(az^2+2bz+c)}{2(b+az)^2}\,dz$$

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot(z-x) = \pm\sqrt{a}\,\frac{az^2+2bz+c}{2(b+az)}$$

erhalte Integral einer rationalen Funktion (falls $a<0$: komplexe Rechnung)

manchmal günstiger: transformiere $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ durch geeignete lineare Substitution $z = \alpha x + \beta$ in eine der Formen

$$\sqrt{z^2+1}, \quad \sqrt{z^2-1}, \quad \sqrt{1-z^2}$$

substituiere hier jeweils

$$z = \sinh u := \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad z = \cosh u := \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad z = \sin u$$

wegen $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ und $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$

erhalte jeweils

$$\sqrt{z^2+1} = \cosh u, \quad \sqrt{z^2-1} = \sinh u, \quad \sqrt{1-z^2} = \cos u$$

erhalte damit z. B.

$$\int R(\sqrt{1-z^2})\,dz = \int R(\cos u)\cos u\,du,$$

ist vom folgenden Typ:

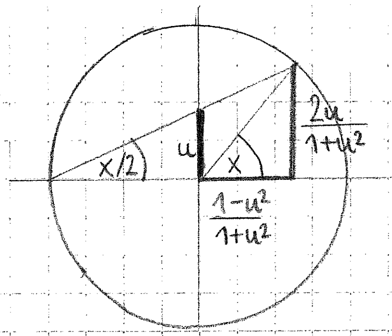
• Integrale der Form $\int R(\sin x, \cos x, \tan x)\,dx$:

subst. $u = \tan\frac{x}{2}$ (Euler), damit

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \tan x = \frac{2u}{1-u^2}$$

gilt wegen $\frac{u}{1} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ (Bild)

und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



$$x = 2 \arctan u$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$$

erhalte Integral einer rationalen Funktion

Bsp: $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{2\,du}{(1+u^2)\left(2+\frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int \frac{du}{u^2+u+1}$

$$\underset{§4.3.2}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

- Integrale der Form $\underline{\int R(e^{\lambda x})\, dx}$ (auch komplexes λ)

Subst. $u = e^{\lambda x}$, $du = \lambda e^{\lambda x}\, dx$ bzw. $dx = \frac{du}{\lambda u}$

ergibt Integral einer rationalen Funktion

Bsp: $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sinh x} = \int \frac{dx}{2+\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})} = 2\int \frac{1}{4+u-\frac{1}{u}}\,\frac{du}{u}$

$$= 2\int \frac{du}{(u+2)^2-5} \underset{\uparrow\,\text{PBZ}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{u+2-\sqrt{5}}{u+2+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{e^x+2-\sqrt{5}}{e^x+2+\sqrt{5}}$$

4 Vertauschungssätze

4.1 Termweise Integration von glm. konvergenten Reihen

Satz 1: Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $(n = 1,2,3,\ldots)$

Folge (f_n) konvergiere glm

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Beweis: Sei $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

wissen nach S.1, §1.2.1 $\quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Sei $\varepsilon > 0$ geg.

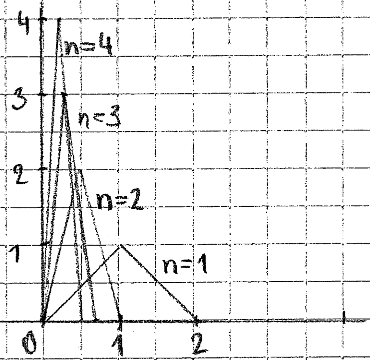
(f_n) glm konvergent $\Longrightarrow \exists N \ \forall n \geq N \ \forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$\text{damit} \quad \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\underset{\substack{HS 4\\ §3.2}}{\leq} \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{<\varepsilon}\,dx \underset{\substack{HS 1\\ §3.3}}{<} \varepsilon(b-a)$$

$\Longrightarrow$ Beh. $\square$

Bem: Gegenbsp. bei nichtglm. Konvergenz



$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ (punktweise, aber nicht glm)

aber $\int_a^b f_n(x)\,dx = 1 \quad \forall n$

als Folgerung erhalten für Reihen:

Satz 2: Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $(n = 0,1,2,\dots)$

Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ konvergiere glm

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b f_j(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,dx$$

Beweis: $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b f_j(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \int_a^b f_j(x)\,dx$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{HS1, §5.2} \\ \text{(und Induktion)}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S.1}}}{=} \int_a^b \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\,dx \qquad \square$$

Bsp: (Mercator, s. Kap. I, §3.3) für $|b| < 1$ ist

$$\int_0^b \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^b \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S.2}}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \int_0^b x^j\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{b^{j+1}}{j+1}$$

da nach Majorantenkriterium $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j$ auf $(-b, b)$ glm konvergent

$\left(|(-1)^j x^j| \le b^j, \quad \sum_0^{\infty} b^j = \frac{1}{1-b} \text{ konv.} \right)$

$$\int_0^b \cos x\,dx = \int_0^b \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \underset{\text{S.2}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^b (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{b^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sin b$$

da nach Maj.kriterium cos-Reihe auf $(-b, b)$ glm. konvergent, $\forall b \in \mathbb{R}$

4.2 Vertauschen von Grenzwert und Ableitung, termweise Differentiation von Reihen

Satz 1: Seien $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig diffbar $(n \in \mathbb{N})$. Es gelte

$$f_n \to f \quad \text{punktweise}$$
$$f_n' \to g \quad \text{glm} \qquad (\text{wobei } f, g : (a,b) \to \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ f stetig diffbar auf (a,b),

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Beweis: Sei $x_0 \in (a,b)$

$f_n' \to g$ glm $\Rightarrow$ g stetig (nach III.2) und

$$\forall x \in (a,b): \quad \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \underset{\text{S. 4.1}}{=} \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

$\parallel$ Hauptsatz DI

$$\lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0) \right) \underset{\text{VS}}{=} f(x) - f(x_0)$$

$\Longrightarrow$ f Stammfunktion von g (nach S ~~6.4~~ 3.1), also

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \forall x\in(a,b) \qquad \square$$

<u>Gegenbsp.</u> bei nichtglm. Konvergenz von f_n':

$$f_n(x) = \sqrt{x^2+\tfrac{1}{n}} \longrightarrow f(x) = |x| \qquad \text{glm auf } \mathbb{R}$$

nicht diffbar in 0

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} \longrightarrow \operatorname{sign}(x) \qquad \text{pktw., nicht glm}$$

$f_n'(0) = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, aber $f'(0)$ existiert nicht!

für Reihen erhalten als Folgerung

<u>Satz 2</u>: Seien $f_j : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig diffbar $(j = 0,1,2,\dots)$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ konvergiere pktw., $\sum_{j=0}^{\infty} f_j'$ konv. glm.

$\Longrightarrow$ $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ ist auf (a,b) stetig diffbar mit der Ableitung

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right)' = \sum_{j=0}^{\infty} f_j' .$$

<u>Beweis:</u> wende S.1 an auf Partialsummen $s_n = \sum_{j=0}^{n} f_j$. $\square$

5 Potenzreihen und Taylor-Reihen

5.1 Konvergenzradius von Potenzreihen

Potenzreihe $\quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \qquad (a_j \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$

für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergent?

HS: Reihe $\sum_0^\infty a_j x^j$ konvergiere für $x = x_0$.

$\Longrightarrow$ Reihe konvergiert absolut für alle x mit $|x| < |x_0|$.

Sie konvergiert glm auf jedem Intervall $[-r, r]$ mit $0 < r < |x_0|$.

<u>Beweis:</u> $\sum_0^\infty a_j x_0^j$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n x_0^n \to 0$ für $n \to \infty$

insbes. beschränkte Folge, d.h. $\exists B \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: |a_n x_0^n| \leq B$

für $|x| \leq r < |x_0|$ ist

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n = |a_n x_0^n| \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n \leq B q^n \quad \text{mit } q = \frac{r}{|x_0|} <$$

konv. Majorante $\sum_0^\infty B q^j = \frac{B}{1-q}$

nach Weierstraß' Majorantenkriterium (§ III.2):

$\sum_0^\infty a_j x^j$ konvergiert glm und absolut auf $[-r, r]$.

21.1.

<u>Satz und Def:</u> Mit $\rho := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_0^\infty a_j x^j \text{ konvergiert}\}$

gilt: Die Reihe $\sum_0^\infty a_j x^j$ konvergiert für alle x mit $|x| < \rho$,
divergiert — " — $|x| > \rho$

Die Konvergenz ist glm auf $[-r, r]$ für jedes $r < \rho$.

ρ heißt <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe.

<u>Bem:</u> (a) $\rho := \infty$, falls Reihe $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert
(b) keine Aussage bei $|x| = \rho$

<u>Beweis:</u> Sei $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_0^\infty a_j x^j \text{ konvergiert}\}$.

$\rho = \sup D \underset{\text{Def. sup}}{\Rightarrow}$ (i) $\forall x \in D: x \leq \rho$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 \in D: x_0 > \rho - \varepsilon$

aus (ii) nach HS: Reihe konvergiert für alle x, mit $|x| < x_0$
da x_0 bel. nahe an ρ: konv — " — $|x| < \rho$

wäre die Reihe für ein x_0 mit $|x_0| > \rho$ konvergent, dann nach HS auch für alle x mit $\rho < |x| < |x_0|$ im Wspr. zu (i

Bsp: geometrische Reihe $\sum_0^\infty x^j$ $\qquad \rho = 1$

Berechnung von ρ allgemein?

Satz 2: (Cauchy 1821) Der Konvergenzradius ρ der Reihe $\sum_0^\infty a_j x^j$ ist gegeben durch

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| ,$$ falls diesen Grenzwert existiert (oder ∞)

oder auch durch

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

(hier verl. $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$

Beweis: wende Quotienkriterium (II §2.2) an auf $\sum_0^\infty \alpha_j$ mit $\alpha_j = a_j$

$$l := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$= \frac{|x|}{\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

Reihe konvergiert, falls $l < 1$
divergiert $l > 1$ $\Big\}$ 1. Beh.

2. Formel analog mit Wurzelkriterium aus §2.2 $\square$

Bsp: 1) $\sum_0^\infty \frac{x^j}{j^\alpha}$ $\qquad a_j = \frac{1}{j^\alpha}$ $\qquad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \to 1$ für $n\to\infty$

somit $\rho = 1$ (Stetigkeit der Potenzfunktion)

beachte: $\alpha \leq 0$ Reihe divergiert in $+1, -1$

$0 < \alpha \leq 1$ — " — $+1$, konv. in -1 (Leibniz-K

$1 < \alpha$ konv. in $+1, -1$

Beweis: (a) Sei $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} x^j$ mit $a_{nj} = \begin{cases} a_j & j \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ebenso $g_n(x) = \sum_0^n b_j x^j = \sum_0^\infty b_{nj} x^j$ mit $b_{nj} = \begin{cases} b_j & j \le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

haben $f_n(x)\, g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} x^k$

mit $c_{nk} = \sum_{j=0}^{k} a_{n,k-j}\, b_{nj}$

beachte $c_{nk} = c_n$ für $k \le n$, insbes. $\lim_{n\to\infty} c_{nk} = c_k$

$c_{nk} = 0$ für $k \ge 2n$

wegen $|a_{nj}| \le |a_j|$, $|b_{nj}| \le |b_j|$ und Δ-Ungl.:

$$|c_{nk}| \le d_k := \sum_{j=0}^{k} |a_{k-j}| \cdot |b_j|$$

zeigen in Teil (b) des Beweises: $\sum_0^\infty d_k |x|^k$ konv. für $|x| \le r$

damit nach Satz über dominierte Konvergenz (§2.3):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{und abs. konv.}$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, g_n(x) & & h(x) \\ \| & & \\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)\, g(x) & & \end{array}$$

(b) setze $d_{nk} = \sum_{j=0}^{k} |a_{n,k-j}| \cdot |b_{nj}|$, damit wie oben

$$\sum_{k=0}^{\infty \to 2n} d_{nk} r^k = \sum_{j=0}^{n} |a_j| r^j \cdot \sum_{j=0}^{n} |b_j| r^j \le \sum_0^\infty \text{—}\!\!/\!\!\!\text{.} \cdot \sum_0^\infty \text{—}\!\!/\!\!\!\text{.}$$

komv. nach VS

haben $0 \le d_{nk} \le d_{n+1,k}$ $\forall k,n$ und $\lim_{n\to\infty} d_{nk} = d_k$

aus Satz über monotone Konvergenz (§2.3): $\sum_0^\infty d_k r^k$ konvergiert $\square$

2) $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^j}{j!}$ konvergiert $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \rho = \infty$

3) $\sum_0^\infty j!\, x^j$ $\quad a_j = j!$ $\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow \rho = 0$

4) $\sum_{k=0}^\infty x^{k!} = x + x + x^2 + x^6 + x^{24} + \dots$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = k! \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ $\quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \rho = 1$

5.2 Produkt von Potenzreihen

zunächst formale Rechnung:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) =$$
$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \dots$$
$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

mit

$$(*) \quad c_k = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Folge (c_n) heißt <u>Cauchy-Produkt</u> der Folgen (a_n), (b_n)

obige Rechnung wird gerechtfertigt durch

<u>Satz:</u> Sei $f(x) = \sum_{j=0}^\infty a_j x^j$ absolut konvergent für $|x| \le r$

$g(x) = \sum_0^\infty b_j x^j$ — " —

$\Rightarrow$ $h(x) := \sum_0^\infty c_k x^k$ mit $(*)$ ist auch abs. konv. für $|x| \le r$, u

$$f(x) g(x) = h(x) \quad \text{für } |x| \le r$$

(Bem: $x<1$)

5.3 Stetigkeit auf dem Konvergenz~~in~~intervall

Satz: (Abel 1826) Sei $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_0^\infty a_j x^j \text{ konvergiert}\}$.
Dann ist
$$f : D \to \mathbb{R} : \quad f(x) = \sum_0^\infty a_j x^j \quad \text{stetig auf } D.$$

Bem: wissen $(-\rho, \rho) \subseteq D \subseteq [-\rho, \rho]$ (ρ Konv.radius)

falls $\rho \in D$, ist also insbes. $f(\rho) = \lim\limits_{x \to \rho^-} f(x)$.

wissen aus §II.1: Reihe konv. glm auf $[-r, r]$ für jeden r mit $0 < r < \rho$.
daher nach ~~§4.1~~ III.2.1: f stetig auf $[-r, r]$ – " – ,
also f stetig auf $(-\rho, \rho)$

z.z. noch:
f stetig in Randpunkten $\pm\rho$, soferne Reihe dort konvergiert

Beweis benötigt Analogon der partiellen Integration
$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = F(x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx,$$
wobei F Stammfunktion von f

HS: (partielle Summation) Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen. Es ist
$$\sum_{j=1}^k a_j b_j = \left(A_k b_{k+1} - A_0 b_1\right) - \sum_{j=1}^k A_j (b_{j+1} - b_j),$$

wobei $A_j = \sum_{l=1}^j a_l + C$, $A_0 = C$ mit $C \in \mathbb{R}$ bel. Konstante

Beweis des HS: haben

$$a_j b_j = (A_j - A_{j-1}) b_j = A_j(b_j - b_{j+1}) - A_{j-1} b_j + A_j b_{j+1}$$

summiere von 1 bis k, erhalte Beh. $\square$

Beweis des Satzes: zeigen noch: f stetig in ϱ, falls $\varrho \in D$

($-\varrho$ ebenso)

(a) Sei $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$

zeigen in Teil (b): $f_n \to f$ glm auf $[0,\varrho]$

damit nach ~~§4.1~~ III.2.1: f stetig auf $[0,\varrho]$, insbes. in ϱ

(b) (Hauptteil des Beweises)

nehme o.E. $\varrho = 1$ an (betrachte sonst $f_n(\varrho x)$ statt $f_n(x)$)

falls $\overset{1}{\varrho} \in D$, ist dann $\sum_0^\infty a_j$ konvergent

Sei $\varepsilon > 0$ bel., wissen (Cauchy' Konv. krit. für Reihen II.2.2)

$$\exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1 \qquad |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon \qquad (*)$$

betrachte (für festes $n \geq N$)

$$f_{n+k}(x) - f_n(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{n+j} x^{n+j} \underset{\uparrow}{=}$$

(HS mit a_{n+j} statt a_j, x^{n+j} statt b_j)

$$= \left(A_k x^{n+k+1} - A_0 x^{n+1}\right) - \sum_{j=1}^{k} A_j \left(x^{n+j+1} - x^{n+j}\right)$$

mit $A_j = \sum_{\ell=1}^{j} a_{n+\ell}$, $A_0 = 0$

nach $(*)$ ist $|A_j| < \varepsilon \quad \forall j$

somit für $x \in [0,1]$ (beachte $|x^{n+j+1} - x^{n+j}| = -(x^{n+j+1} - x^{n+j})$)

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon x^{n+k+1} - \sum_{j=1}^{k} \varepsilon \left(x^{n+j+1} - x^{n+j}\right) = \varepsilon x^{n+1} \leq \varepsilon$$

also: zu bel. $\varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n \geq N$ $\forall k \geq 1$ $\forall x \in [0,1]$: $|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

nach S.2, ~~§4.2~~ III.2.1: f_n konvergiert glm auf $[0,1]$

Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_0^\infty a_j x^j = f(x)$

Bsp: $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ konvergiert für $x \in (-1,1]$

wissen aus §5.4.1 (termweise Integration) und §5.1 (glm Konv auf $[-r,r]$ mit $0<r<\rho$)

$$f(x) = \int_0^x \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j t^{2j}\, dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x \quad \text{für } |x|<1$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = f(1) \underset{\text{Satz}}{=} \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

also Formel von Leibniz: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots$

damit nun bewiesen $\square$

5.4 Integration und Differentiation

Sei $f: (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}$ geg. durch $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ ($\rho > 0$ Konv.radius)

Satz 1: $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{x^{j+1}}{j+1}$ für $|x|<\rho$

Beweis: wie im obigen Bsp unmittelbar aus §5.4.1 und §5.1 $\square$

Satz 2: f ist diffbar auf $(-\rho,\rho)$ und

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} \quad \text{für } |x|<\rho.$$

Beweis: Reihe $\sum_1^{\infty} j a_j x^{j-1}$ hat Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \underbrace{\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}_{\rho} = \rho$$

da $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$ bekannt aus Bsp §4.5 (L'Hospital)

nach §5.1 konvergieren also $\sum a_j x^j$ und $\sum j a_j x^{j-1}$
glm auf $[-r, r]$ für jedes $r \in (0, \rho)$.
mit §4.6 (termweise Differentiation von Reihen) ergibt sich Beh. □

Bsp: $f(x) = \sum_0^\infty \frac{x^j}{j^2}$ konvergiert für $|x| \le 1$

$f'(x) = \sum_1^\infty \frac{x^{j-1}}{j}$ für $|x| < 1$

aber Reihe divergiert für $x = 1$!

Satz 3: (Identitätssatz) Für ein $\delta > 0$ gelte
$$\sum_0^\infty a_j x^j = \sum_0^\infty b_j x^j \quad \text{für } |x| < \delta .$$
Dann ist $a_j = b_j \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis: wiederholte Anwendung von S.2 (Induktion) zeigt:
$f(x) = \sum_0^\infty a_j x^j$ bel. oft diffbar auf $(-\delta, \delta)$ und
$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^\infty j(j-1)\ldots(j-k+1)\, a_j x^{j-k} , \quad |x| < \delta$$
insbes. $f^{(k)}(0) = k!\, a_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

also $\underline{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$, dasselbe gilt für b_k □

5.5 Taylor-Reihen

Satz 1: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in (a, b)$. Falls
(*) $f(x) = \sum_{j=0}^\infty a_j (x - x_0)^j$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, mit $\delta > 0$
so ist $a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$.

Falls (*) gilt, heißt f analytisch in x_0. Die Reihe heißt Taylor-Reihe

Beweis: voriger Beweis, $x - x_0$ statt x. $\square$

Frage: Ist jede bel. oft diffbare Funktion analytisch?

Gegenbsp. von Cauchy:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f ist auf $\mathbb{R}$ bel. oft diffbar, und $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k$ (Ü)
(wegen $\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} / x^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

aber für $x \neq 0$ ist $f(x) \neq \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{f'(0)}_{0} x + \frac{1}{2} \underbrace{f''(0)}_{0} x^2 + \dots = 0$

betrachte Partialsummen der Taylor-Reihe und Restterm:

Satz 2: (Taylor-Entwicklung mit Restterm von Cauchy/Bernoulli)
Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig diffbar, $x_0 \in (a,b)$
$\Rightarrow$
$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x-x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt$$
$\forall x \in (a,b)$

Beweis:
wiederholte partielle Integration in
$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} 1 \cdot f'(t)\, dt$$
$$= f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt \quad \text{usw.}$$
(Induktion) $\square$

Satz 3: (Taylor-Entwicklung mit Restterm von Lagrange)
Unter den VS von S.2 gilt: Zu jedem $x \in (a,b)$ gibt es ξ zw. x und x_0, sodass
$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(x-x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

Beweis: wende Satz aus §2.3 an (verallg. MWS der Integralrechnung)

Integral aus 5.1:

$$\int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^k}{k!}}_{\geq 0} f^{(k+1)}(t)\,dt = f^{(k+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^k}{k!}\,dt = f^{(k+1)}(\xi)\,\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

5.6 Beispiel: Binomialreihe

Satz (Newton 1669, Abel 1826) Für bel. $a \in \mathbb{R}$ und $|x|<1$ ist

$$(1+x)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} x^j \quad , \quad \text{wobei } \binom{a}{j} = \frac{a(a-1)\dots(a-j+1)}{j!}$$

$$\binom{a}{0} = 1 \quad \text{(Binomialkoeffizienten)}$$

Beweis: (nach Weierstraß 1861)

setze $f(x) = (1+x)^a = \exp(a \ln(1+x))$

haben $f'(x) = \exp(a\ln(1+x))\,\frac{a}{1+x} = a(1+x)^{a-1}$

$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$

usw., allg. $f^{(k)}(x) = a(a-1)\dots(a-k+1)(1+x)^{a-k}$

Taylor-Entwicklung:

$$(1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + a(a-1)\dots(a-k+1)\frac{x^k}{k!} + R_k(x)$$

mit Restterm

$$R_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!}\, a(a-1)\dots(a-k)(1+t)^{a-k-1}\,dt$$

zeigen: $R_k(x) \to 0$ für $k\to\infty$, sofern $|x|<1$

nach MWS Int.rechnung (§2.3) ist für ein ξ zwischen 0 und x

$$R_k(x) = \underbrace{\frac{a(a-1)\dots(a-k)}{k!}}_{\stackrel{!!}{=}\,\alpha_k} \underbrace{(x-\xi)^k (1+\xi)^{a-k-1}}_{(1+\xi)^{a-1}\left(\frac{1-\xi/x}{1+\xi}\right)^k x^k}$$

$(1+\xi)^{a-1}$ zwischen 1 und $(1+x)^{a-1}$, also $(1+\xi)^{a-1} \leq c(x) := \max(1, (1+x)^{a-1})$

ξ zwischen 0 und x $\Rightarrow$ $0 \leq 1 - \frac{\xi}{x} \leq 1 + \xi$ für $|x| < 1$

$\Rightarrow$ $0 \leq \dfrac{1 - \xi/x}{1+\xi} \leq 1$

damit $|R_k(x)| \leq c(x) \, |\alpha_k x^k|$

wegen $\lim\limits_{k \to \infty} \left| \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| = \lim\limits_{k \to \infty} \left| \dfrac{k+1}{a-k-1} \right| = 1$

gilt nach Quotientenkriterium (§2): Reihe $\sum\limits_0^\infty \alpha_k x^k$ konv. für $|x| < 1$

insbes. $\alpha_k x^k \to 0$

somit $R_k(x) \to 0$ für $k \to \infty$ $\square$