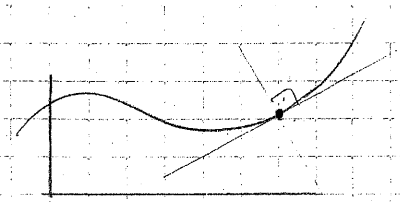
IV. Differentiation, Integration, Reihenentwicklungen von Funktionen

Ziele dieses Kapitels: • "Calculus" von Newton, Leibniz, Joh. und Jac. Bernoulli, Euler kennenlernen und damit umgehen

• mathematisch strenge Fundierung (im Sinne des 19. Jh.)

1. Differentiation von Funktionen

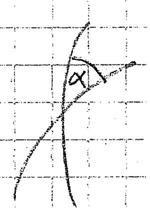
1.0 Vorbemerkungen



Problem: Sei $y = f(x)$ gegebene Kurve

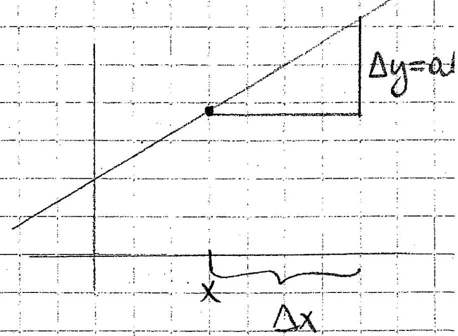
möchte in jedem Punkt die Steigung, die Tangente oder die Normale an die Kurve bestimmen

Lösung erforderlich bei



- Berechnung der Schnittwinkel zweier Kurven (Descartes)
- Bestimmung von Maxima und Minima (Fermat)
- Geschwindigkeit, Beschleunigung (Galilei, Newton)

⋮



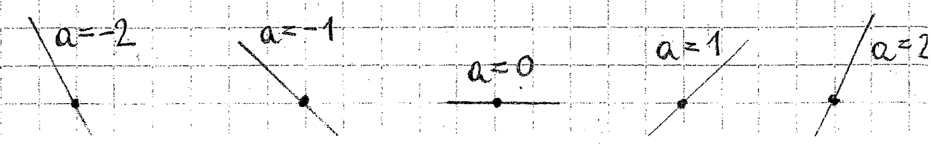
lineare Funktion $\quad y = ax + b$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Stelle } x: & y = ax + b \\ \text{Stelle } x+\Delta x: & y + \Delta y = a(x+\Delta x) + b \end{array}\right\}$$

$$\Delta y = a\,\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \qquad \text{Steigung}$$

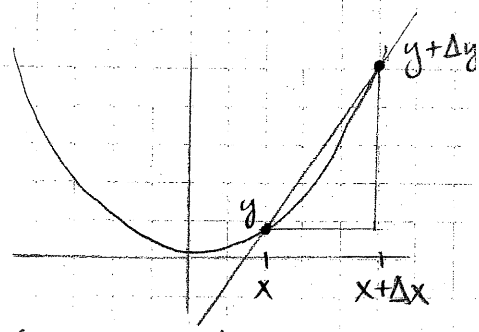
Bsp: $y = ax$



Parabel $y = x^2$

x : $y = x^2$

$x + \Delta x$: $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$



$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Steigung der Geraden durch (x,y) und $(x+\Delta x, y+\Delta y)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

für $\Delta x \to 0$ erhalte Steigung der Tangente in (x,y):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x \quad \text{für} \quad \Delta x \to 0$$

Notation:

Leibniz (1684) $\frac{dy}{dx} = 2x$

(dy, dx "unendlich kleine" Größen $dy = 2x\,dx$)

Newton (1671) $\dot{y}$ (Fluxion = Geschwindigke

Lagrange (1797) "fonction dérivée" = abgeleitete Funkti

Ableitung, engl. deriva

y' bzw. $f'(x)$

(für $y = f(x)$)

Auffassung als <u>Grenzwert</u> allmählich seit Mitte 18. Jh. (d'Alembert)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} \qquad \text{für } \Delta x \to 0$$

Cauchy (1821): $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

"Limes" = Grenzwert

Perfektionierung des Grenzwertbegriffs durch Bolzano und Weierstraß im 19. Jh. (s. Kap. III)

1. Differenzierbare Funktionen

1.1 Ableitung als Grenzwert

Def: Eine Funktion $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$, falls der folgende Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert:

$$(*) \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{(Cauchy 1823)}$$

$f'(x_0)$ heißt dann Ableitung von f in x_0.
f heißt stetig differenzierbar, falls f diffbar in allen $x_0 \in (a,b)$ und $f':(a,b) \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Für Beweise von Sätzen über diffbare Funktionen oft folgende Formulierungen hilfreich:

HS: Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in (a,b)$.
Äquivalent sind:

(i) Es gilt $(*)$

(ii) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad \forall x \in (a,b)$,
wobei r stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0$ (Weierstraß)

(iii) $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)\cdot(x - x_0) \quad \forall x \in (a,b)$,
wobei φ stetig in x_0 mit $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ (Carathéodory)

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (iii) wegen $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x \neq x_0$ und

$$\varphi \text{ stetig in } x_0 \underset{§3.5}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$$

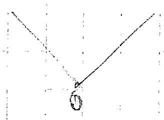
(iii) $\Leftrightarrow$ (ii) mit $\varphi(x) = f'(x_0) + r(x)$ $\square$

Bem: aus (iii) sehen: f diffbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

Bsp: • $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f$ diffbar, $f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

• $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f$ diffbar, $f'(x_0) = 1 \quad \forall x_0$

• $f(x) = |x|$ nicht diffbar in $x_0 = 0$:



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht, wohl aber einseitige Grenzwerte $x \to 0+$, $x \to 0-$

1.2 Differentiationsregeln

Satz 1: Falls f und g diffbar in x_0, so auch

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad f/g \quad \text{soferne } g(x_0) \neq 0.$$

Es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0) \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0) \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

Beweis: (a) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x_0)} + \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{= g'(x_0)}$

(b) verwenden Carathéodory Formulierung:

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), \quad \varphi(x_0) = f'(x_0), \quad \varphi \text{ stetig in } x_0$$

$$g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x - x_0), \quad \psi(x_0) = g'(x_0), \quad \psi \text{ stetig in } x_0$$

multipliziere:

$$f(x) g(x) = f(x_0) g(x_0) + \underbrace{\left(f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x_0) + \varphi(x)\psi(x) \cdot (x - x_0) \right)}_{=: \phi(x)} \cdot (x - x_0)$$

$$\phi(x_0) = f(x_0) g'(x_0) + g(x_0) f'(x_0), \quad \phi \text{ stetig in } x_0$$

geom. Reihe für $\left|\frac{\psi(x)}{g(x_0)}(x-x_0)\right| < 1$

(c) $$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0) + \psi(x)\cdot(x-x_0)} = \frac{1}{g(x_0)} \frac{1}{1 + \frac{\psi(x)}{g(x_0)}(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x_0)} \left(1 - \frac{\psi(x)}{g(x_0)}(x-x_0) + \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\psi(x)}{g(x_0)}(x-x_0) \right)^j \right)$$

$$= \frac{1}{g(x_0)} + \underbrace{\left(-\frac{\psi(x)}{g(x_0)^2} + \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\psi(x)}{g(x_0)} \right)^j (x-x_0)^{j-1} \right)}_{=:\ \phi(x)} (x-x_0)$$

stetig in x_0, $\phi(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

somit $\frac{1}{g}$ diffbar in x_0

$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ $\square$

Bsp: $f(x) = x^2 = x\cdot x \qquad f'(x) = 1\cdot x + x\cdot 1 = 2x$

$f(x) = x^3 = x\cdot x^2 \qquad f'(x) = 1\cdot x^2 + x\cdot 2x = 3x^2$

Induktion: $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ $\quad n = 1,2,3,\dots$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \qquad f'(x) = \frac{0\cdot x^n - 1\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

somit: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

bzw $\underline{\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}}$

Satz 2: Falls f diffbar in x_0 und g diffbar in $y_0 = f(x_0)$, so ist Hintereinanderausführung $g \circ f$ diffbar in x_0, und es gilt die Kettenregel

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0) .$$

Beweis: $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$, $\quad \varphi(x_0) = f'(x_0)$

$g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y - y_0)$, $\quad \psi(y_0) = g'(y_0)$

setze $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ ein, beachte $y - y_0 = \varphi(x)(x - x_0)$:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + \underbrace{\psi(f(x))\,\varphi(x)}_{=: \phi(x)} \cdot (x - x_0)$$

ϕ stetig in x_0, $\phi(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$ $\square$

Bem: $y = f(x)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

$z = g(y)$ $\qquad \dfrac{dz}{dy} = g'(y)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\, g(f(x)) \underset{S.2}{=} g'(\underbrace{f(x)}_{y})\, f'(x) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Bsp:

- $f(x)^n$ $\qquad \left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ z = y^n \end{array}\right\rangle\ z = f(x)^n$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = n\, y^{n-1} f'(x) = n\, f(x)^{n-1} f'(x)$$

- $f(x^n)$ $\qquad \left.\begin{array}{l} y = x^n \\ z = f(y) \end{array}\right\rangle\ z = f(x)^n$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\, \frac{dy}{dx} = f'(y)\, n x^{n-1} = f'(x^n)\, n x^{n-1}$$

Satz 3: Sei $f:(a,b)\to(c,d)$ bijektiv, diffbar in $x_0\in(a,b)$ mit $f'(x_0)\neq 0$.

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ ist diffbar in $y_0=f(x_0)$ mi[t]

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis: $f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0)$, $\varphi(x_0)=f'(x_0)$

für $y=f(x)$ und $y_0=f(x_0)$, d.h. $x=f^{-1}(y)$ und $x_0=f^{-1}(y_0)$, erhalten

$$y-y_0=\varphi(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0))$$

wegen $0\neq f'(x_0)=\varphi(x_0)=\varphi(f^{-1}(y_0))$ ergibt sich

$$f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)=\underbrace{\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}}_{=:\,\phi(y)}(y-y_0)$$

ϕ stetig in y_0 , $\phi(y_0)=\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))}=\frac{1}{\varphi(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}$ $\square$

Bem: sobald bekannt, dass f^{-1} diffbar, dann aus

$f(f^{-1}(y))=y$ mit Kettenregel $f'(f^{-1}(y))\cdot f'(y)=1$,

also $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Bem: $y=f(x)$ $\qquad$ $x=f^{-1}(y)$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \qquad \frac{dx}{dy}\underset{S3}{=}\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Bsp: $y=x^2$ $\qquad$ $x=\sqrt{y}$

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

beachte $\frac{d}{dy}y^n=ny^{n-1}$ hier für $n=\frac{1}{2}$

1.3 Ableitungen der elementaren Funktionen

Polynome: aus $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ erhalte

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \implies P'(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}$$

Rationale Funktionen: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q Polynome)

aus Quotientenregel: $R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}$

(falls $Q(x) \neq 0$)

Exponentialfunktion:

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1 \text{ für } h \to 0 \quad (\text{III}.2.1)} e^x$$

damit:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Bem: mit Kettenregel $\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$

Logarithmus: $y = \ln x$ Umkehrfunktion zu $x = e^y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \qquad \frac{dx}{dy} = e^y$$

somit $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

allgemeine Potenzfunktion $\quad x^a = e^{a \ln x}$, $a \in \mathbb{R}$

Kettenregel: $\quad y = a \ln x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$

$\qquad z = e^y \qquad \frac{dz}{dy} = e^y$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = e^{a \ln x}\frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = x^{a-1} a$$

$$\underline{\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1}} \qquad (x>0) \qquad a \in \mathbb{R}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0,} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}$$

denn: $\qquad h \to 0$

$$\cos h - 1 = -\left(\sin \tfrac{h}{2}\right)^2$$

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -\underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \cdot 2 \underbrace{\sin \tfrac{h}{2}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

somit: $\qquad \underline{\frac{d}{dx}\sin x = \cos x}$

ebenso $\qquad \underline{\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x}$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Inverse trigonometrische Funktionen

$$y = \arctan x \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \arcsin x \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.4 Mittelwertsatz

Satz 1: $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ sei diffbar in $x_0 \in (a,b)$.
Falls f in x_0 ein Maximum (oder Minimum) annimmt,
so ist $f'(x_0) = 0$.

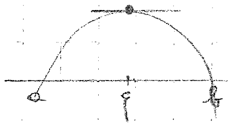
Beweis: falls $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (a,b)$, so ist

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \leq 0, & \text{falls } x > x_0 \\ \geq 0 & \phantom{\text{falls } x} < \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

$$= \lim_{x \to x_0-} \text{"} \quad \geq 0$$

$\Big\} \; f'(x_0) = 0$ $\square$



Satz 2: (sog. Satz von Rolle, nach Rolle 1690)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b).
Falls $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: nach Satz vom Maximum und Minimum (§3.4)
gibt es $x_*, x^* \in [a,b]$ mit $f(x_*) \le f(x) \le f(x^*)$ $\forall x \in [a,b]$

1. Fall: $f(x_*) = f(x^*)$ $\Rightarrow$ f konstante Funktion $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$

2. Fall: $<$ $\Rightarrow$ für $\xi = x_*$ oder $\xi = x^*$ ist

$f(\xi) \neq f(a) = f(b)$

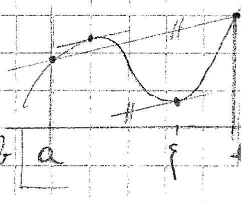
somit $\xi \in (a,b)$, dort Max. oder Min.

nach S.1: $f'(\xi) = 0$ $\square$

Satz 3: (Mittelwertsatz, Lagrange 1797)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b).
$\Rightarrow$ $\exists \xi \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$



Beweis: Idee: ziehe lineare Funktion durch Endpunkte ab und wende S.2 an: def.

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a) \right)$$

haben $h(a) = h(b) = 0$, nach S.2 $\exists \xi \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ $\square$

Mittelwertsatz hat wichtige Folgerungen: (dabei jeweils f wie in S.3)

Folg. 1: Falls $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in (a,b)$, so ist $f(x) = C$ (Konstante) $\forall x \in [a$

Beweis: wende MWS auf $[a,x]$ an: $f(x) - f(a) = f'(\xi) \cdot (x-a) = 0$

Folg. 2: Falls $f'(\xi) \underset{(\geq)}{>} 0 \quad \forall \xi \in (a,b)$, so ist f (streng) monoton wachsen

Beweis: Sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Wende MWS auf $[x_1, x_2]$ an:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \quad , \quad \text{also} \quad f(x_1) < f(x_2) \qquad \square$$

Folg. 3: Falls $|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in (a,b)$, so ist

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M\,|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

Beweis: $|f(x_2) - f(x_1)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq M} \cdot |x_2 - x_1| \qquad \square$

1.5 Regel von de L'Hospital

Problem: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$, wenn $f(x), g(x) \to 0$ (bzw. ∞

unbestimmte Ausdrücke "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$"

Antwort beruht auf

<u>Satz 1:</u> (verallgemeinerter MWS, Cauchy 1821)
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf (a,b)
Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$.
$\Longrightarrow$ $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $\xi \in (a,b)$, sodaß

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

<u>Beweis:</u> nach S.v. Rolle $g(b) \neq g(a)$, da nach VS $g'(\xi) \neq 0$ $\forall \xi \in (a,b$
Beweis ähnlich jenem des MWS (dort $g(x) = x$): setzen

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right)$$

haben $h(a) = h(b) = 0$, h stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b)
nach S.v. Rolle: $\exists \xi \in (a,b): h'(\xi) = 0$

aber $h'(\xi) = f'(\xi) - \underbrace{g'(\xi)}_{\neq 0} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ $\Bigg\}$ Beh. $\square$

<u>Satz 2:</u> (Bernoulli 1691, de L'Hospital 1696)
Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$
Es gelte entweder (a) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ für $x \to a+$
oder (b) ∞ ∞ —"—
$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, sofern rechte Seite existiert

Bem: ebenso für $x \to b-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

<u>Beweis:</u> (a) setze f, g zu stetigen Funktionen auf $[a, b)$ fort du[rch]

$$f(a) = g(a) = 0$$

nach S.1 gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein $\xi \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Mit $x \to a+$ auch $\xi \to a+$, daher

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ falls dieser Grenzwert existie[rt]}$$

(b) sei $\ell := \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\varepsilon > 0$ bel.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in (a, a+\delta) : \quad \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon$$

nach S.1 daher für bel. $x \in (a, a+\delta)$ und $y = a+\delta$:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell \right| < \varepsilon$$

schreibe

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \underbrace{\frac{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}}_{\to 1 \text{ für } x \to a+ \text{ nach VS (b)}} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$$

daher gibt es $\delta_1 > 0$, sodaß $\forall x \in (a, a+\delta_1)$:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon$$

somit $\forall x \in (a, a+\delta_1)$: $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < 2\varepsilon$

da $\varepsilon > 0$ bel., folgt Beh. $\square$

Bsp: 2) Für $a>0$ ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a x^{a-1}} = 0$$

(Logarithmus wächst für $x\to\infty$ langsamer als jede positive Po

1) $$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}_{-x} = 0$$

3) $$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} \exp(x\ln x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exp stetig}}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0+} x\ln x\right) \overset{2)}{=} \exp(0) = 1$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right) \underset{1)}{=} \exp(0) =$$

1.6 Höhere Ableitungen

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar.

Falls auch $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, heißt $(f')' =: f''$ zweite Ableitung

allg: $f^{(k)}$ = Ableitung von $f^{(k-1)}$, falls $f^{(k-1)}$ diffbar

f heißt beliebig oft diffbar, falls $f^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert

entsprechend: f heißt k-mal stetig diffbar, falls f k-mal diffbar und $f^{(k)}$ stetig ist.

Bez: Sei I Intervall

$C(I)$ oder $C^0(I)$ = Menge der stetigen Funktionen auf I

(für continuous) $C^k(I)$ –"– k-mal stetig diffbaren –"–

$C^\infty(I)$ bel. oft diffbaren

beachte $C^\infty(I) \subsetneq C^{327}(I) \subsetneq \ldots \subset C^2(I) \subsetneq C^1(I) \subsetneq C^0(I)$

Bsp: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ Polynom

$f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2$, $f'''(0) = 6a_3$

$f^{(k)}(0) = k!\, a_k$ $\quad k = 0, 1, \ldots, n$

also $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$

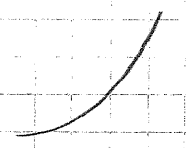
was, wenn $n \to \infty$? (Taylor-Reihe, §5)

Zweite Ableitung

$y' = f'(x)$ Steigung der Tangente an Kurve $y = f(x)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f($

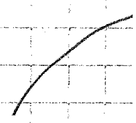
$<$

$y'' = f''(x)$: geometrische Bedeutung ?



$f''(x) > 0 \Rightarrow$ Steigung $f'(x)$ zunehmend

$<$ ab -

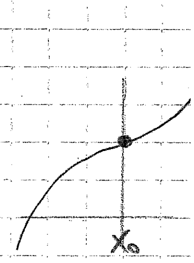


$\Rightarrow$ Kurve $y = f(x)$ nach oben gekrümmt (konvex)

unten (konkav)

bei Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung:

Stelle x_0 mit $f''(x_0) = 0$ heißt Wendepunkt



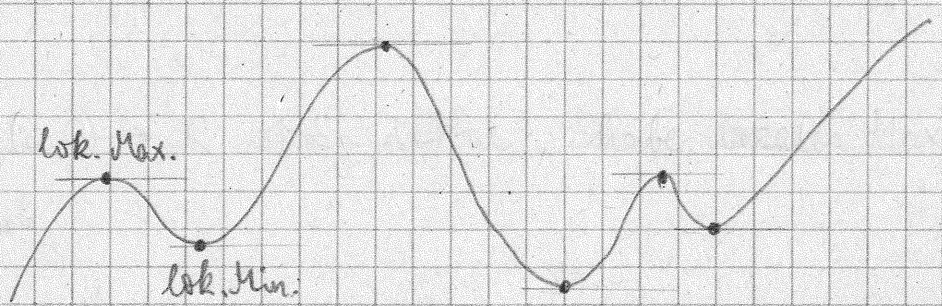
1.7 Maxima und Minima

(eine der frühesten Motivationen für die Differentialrechnung)

Def: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a,b)$ lokales Maximum (Min.), falls es ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$f(x_0) \underset{\leq}{\geq} f(x) \qquad \text{für alle } x \in (a,b) \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

Bild:



Bereits in §1.4 gezeigt

Satz: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, habe lokales Max. (Min.) in $x_0 \in (a,b)$ $\Longrightarrow$

$$f'(x_0) = 0$$

Beweis: Sei $x > x_0$, x nahe lok. Max. x_0 $(|x - x_0| < \delta)$

habe $f(x) \leq f(x_0)$, also

$$0 \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{\text{MWS}}{=} f'(\xi) \qquad x_0 < \xi < x$$

$$x \to x_0+ \quad : \quad \xi \to x_0+ \qquad f'(x_0) = \lim_{\xi \to x_0+} f'(\xi) \leq 0$$

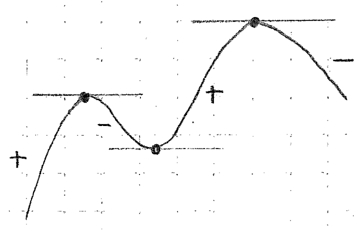
jetzt $x < x_0$

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \qquad x < \xi < x_0$$

$$x \to x_0- \quad : \quad \xi \to x_0- \qquad f'(x_0) = \lim_{\xi \to x_0-} f'(\xi) \geq 0$$

$\square$

(lokales) Maximum , falls in x_0 Vorzeichen von $f'(x)$ von + zu − wechs
Minimum − zu +



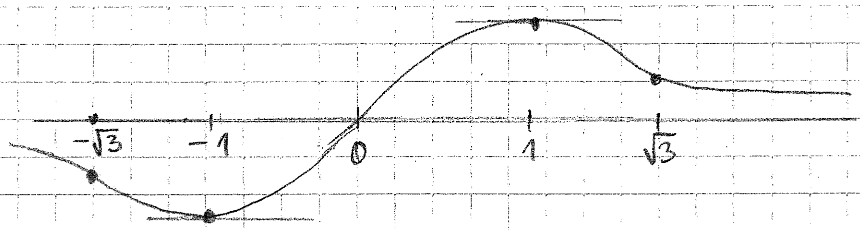
erfüllt, falls $f''(x_0) < 0$
$>$

sonit:

| $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lokales Maximum
| — " — $>$ — " — Minimum

Bsp. (bei Euler)

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$



$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

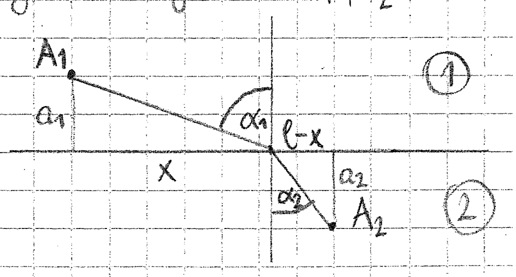
$$y'' = \frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}$$

Minimum in $x = -1$
Max $x = +1$
Wendepunkte: $x = 0, \pm\sqrt{3}$

konvex für $-\sqrt{3} < x < 0$ und $\sqrt{3} < x < +\infty$
konkav sonst

Bsp: Lichtbrechung 2 Medien mit Geschwindigkeiten v_1, v_2

zu geg. Punkten A_1, A_2 suche Winkel α_1, α_2, sodaß Licht von A_1 nach A_2 in kürzester Zeit gelangt (Fermat 1638):



$$T = \frac{\sqrt{a_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 + (l-x)^2}}{v_2} = \min!$$

Lösung durch Leibniz (1684) "in 3 Zeilen":

$$T' = \frac{1}{v_1} \frac{2x}{2\sqrt{a_1^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{-2(l-x)}{2\sqrt{a_2^2 + (l-x)^2}}$$

beachte $\sin\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}}$, $\sin\alpha_2 = \frac{l-x}{\sqrt{a_2^2 + (l-x)^2}}$

daher $T' = 0 \iff \underline{\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}}$ (Snellius' Brechungsgesetz)

haben $T'' = \frac{1}{v_1} \frac{a_1^2}{(a_1^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{v_2} \frac{a_2^2}{(a_2^2 + (l-x)^2)^{3/2}} > 0$,

somit wirklich Minimum